読むだけでわかる
数学再入門

微分・積分　演習解答

今井　博　著

Mathematics Revisited

「∇・p や∇× p は, なぜ発散や

回転と呼ぶのかを知っていますか?」

本書は，微分・積分編の演習問題の解答を中心に，微分・積分編の内容を，読むだけで，さらによく理解できるようになっています．途中で投げ出さず，最後まで，読んでくださいますようお願い致します．

はじめに

微分？，積分？，それって？ 昔習ったという記憶しかない．なんだっけ？ という読者，仕事や研究で微分や積分について必要になったが，どんな本で勉強したらよいかわからない，という読者のために，また，数学の授業でどうもよく意味が分からないという理工系の学生のために，懇切丁寧に，手取り足取り？，（ただし，宅配のように，お宅まで出張しませんが…（＾÷＾）），分かりやすく説明します．

さて，微分学や積分学は，主として，高校 3 年の理数系の学生が学ぶ数 III という分野で詳しく教えられています．議論はあるでしょうけれど，大量の練習問題をやらされながらも，何のためにこんな式変形を習うのか分からないまま，単位をもらうために頑張った高校生がほとんどではないでしょうか．理学系・工学系の大学や学科に入っても，「難しいのだ！」という印象を植え付けるような数学の講義で，うんざりですよね．分かります．というか，実は，これが著者の体験です．そんな高校生や大学生，社会人に読んでもらいたいのです．いろいろ，苦労したから著者は書きたいと思ったのです．

本書は，本当に読むだけで良いのです．読むだけでわかるように，書いたつもりです．かと言って，低レベルではありません．レベルは，高校生の「数 IIB か数 IIIC」程度から大学１年（教養の必修）で習うあたりです．当然，本書１冊で，微分学・積分学の全ての分野を詳しく取り上げることは出来ませんし，する気もありませし，数学科を出ていない著者には数学の知識や能力に限界があります．ですから，本書では，基礎的な知識を中心にやさしく説明しようと思います．

この本の目的は，理学・工学で用いる数学の微分・積分法に関する基礎の習得です（ただし，複素関数論は含みません）．本書はそのエッセンスを紹介します．もちろん，ある程度の数学を読む知識が必要になります．さらに，読んで分からない部分は調べる意欲が重要です．ここで，何故，英文字などを使うのかという疑問を持っている方に申し上げますと，それは，いろいろな数の代表を英文字で表すためです．コンピュータのプログラムは，定義部分の定数を除けば，全て英文字で代表させて書かれています．後から，必要に応じたケースごとの具体的な数字を英文字に代入すれば，プログラムで設定した方法で答えが簡単に得られます．ですから，考え方によっては，数学で，英文字を用いた数式を書くというのは，コンピュータの「サブルーチン」あるいは「関数」を書いているのと全く同じことなのです．

さて，一番大事なのは，最後まで読み切ることです．ここで「読む」とは，数式の流れを目で見て納得することです．例題は解答を見ないで解ける必要はありません．読むだけで理解できれば結構です．本書では，式の変形は，目で追えるように，できる限り省略しないようにしています．ふむふむと流れを追ってください．本書を読み，さらに詳しい数学へとステップアップして頂けたらと思います．計算で難しそうな場所は，キャラクターが注意点や説明不足を補ってくれます．さあ，皆さん！　早速，スモールワールドにはいっていきましょう！

平成 25 年 10 月
著者

目　　次

1. 微分

微分

第 1 章　演習問題

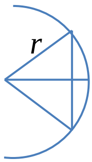
1.1　実数 $p(>0)$ について，$n \to \infty$ のとき $\sqrt[n]{p} \to 1$ を証明せよ.（ヒント：p で場合分け）

1.2　図 **1.1.2-1** のグラフを書く数式を考察せよ.（ヒント：式 1.1.2-6 の p と B は？）

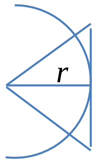
1.3　数列 $a_{n+1} = a_n + a_{n+1}\ (a_0 = 0,\ a_1 = 1)$ であらわされるフィボナッチ数列の一般項を求めよ．また，黄金比（*golden ratio*）との関連を述べよ.

1.4　半径 $r(>0)$ の円に内接するおよび外接する正 $n(\geq 3)$ 多角形の面積 ${}^{in}S_n$ および ${}^{out}S_n$ を求めよ．その場合，$n \to \infty$ としたときは，面積 ${}^{in}S_n$ および ${}^{out}S_n$ はどのように収束するか述べよ.（ヒント：題意は円の面積が両方 πr^2 に収束することを示唆している．以下の 2 つの方法である．三角形の斜辺の長さを r とする場合（左 1 図）と第 2 の辺の長さを r とする場合（右 2 図）で，後者は正多角形が半径 r の円に外接する場合である.

(1)



(2)



1.5　虚数単位 i について，$i^2 = -1$ となることをオイラー公式で示せ.

1.6　複素平面上で，例えば，$z = a + ib$ に $i\left(= \sqrt{-1}\right)$ を掛けると z の位置がどうなるかを，実数-座標軸における幾何的な説明をせよ．同様に，$-i$ をかけた場合を述べよ.

1.7　自然対数の底 e の定義について，式 1.3.4-4 と式 1.3.5-6 を比較して議論せよ.

1.8　次式を（x で）微分しなさい

(1) $y = a^x$　(2) $y = x\log x\ \ (x > 0)$　(3) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$　(4) $y = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

(5) $y = A\sin(\omega t - kx)$　(6) $y = \cos^{-1} x$　(7) $y = \cos^{-1}(\sin x)$

(8) $y = e^{\sin x}$　(9) $y = x^x$　(10) $y = \sin^{-1}(\cos x)$

（ヒント：$(\sin^{-1} x)' = 1\big/\sqrt{1-x^2}$ ）

1.9　式 1.3.5-8 の 2 式

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad , \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

について，を数学的帰納法で，それぞれ，証明せよ.

1.10　$d(\arcsin x)/dx = 1/\sqrt{1-x^2}$　を証明せよ

1.11　$d(\arccos x)/dx = -1/\sqrt{1-x^2}$　を証明せよ

1.12　$d(\arctan x)/dx = 1/(1+x^2)$ を証明せよ．

1.13　$d(\mathrm{arc}\cot x)/dx = -1/(1+x^2)$ を証明せよ．

1.14　$d(u^v)/dx = vu^{v-1}u' + u^v \log u \cdot v'$　を証明せよ．（ヒント：例題 1.3.4-1（2））

1.15　直交座標から極座標への変換は，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のとき，$r = \sqrt{x^2+y^2}$ および $\theta = \tan^{-1}(y/x)$であることを証明せよ．また，dr/dxおよび$d\theta/dx$を求めよ．.

1.16　$u = u(x, y)$ に関するラプラシアン$\nabla^2 u$を極座標で表すと，次式となることを示せ．

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

1.17　$\sqrt{x}$ をマクローリン級数展開で 4 項目まで求めよ．ただし，5 項目からは「…」とする．

1.18　$y = e^x$ のグラフを区間[0,10]（x は 0.2 ごと 51 ポイント）で描き，$x = 2$ での接線を描け．

1.19　単振り子（長さlの紐の先に錘がついているだけの振り子）の周期T は，重力加速をg とする場合$2\pi\sqrt{l/g}$　で与えられる．紐の長さを1%セントずつ0%から100%まで増加させた場合，紐の長さの伸びに対する周期T の変化をグラフで示せ．

1.20　ベクトル$\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b}^T = (b_1, b_2, b_3)$, 行列　$\mathbf{P} = \{p_{ij}\}(i, j = 1, 2, 3)$　とするとき次式を証明せよ．単位ベクトルを $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$, $\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{e}_3\| = 1$ とせよ．

1)　$\mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{a} = \mathbf{a}^T(\mathbf{b}^T\mathbf{P})^T$

2)　$d(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})/d\mathbf{a} = d(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})/d\mathbf{a} = \mathbf{b}$

3)　$d(\mathbf{P}\mathbf{a})/d\mathbf{a} = \mathbf{P}^T$

4)　$d(\mathbf{a}^T\mathbf{P}\mathbf{b})/d\mathbf{a} = \mathbf{P}\mathbf{b},\quad d(\mathbf{a}^T\mathbf{P}\mathbf{b})/d\mathbf{b} = \mathbf{P}^T\mathbf{a}\ \left(= (\mathbf{a}^T\mathbf{P})^T\right)$

5)　$d(\mathbf{a}^T\mathbf{P}\mathbf{b})/d\mathbf{P} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$

1.21　式 1.6.4-5 の解と式 1.6.4-15 から得られる式 1.6.4-16 の解が同じであることを示せ．

1.22　$y = ax^2 + bx + c\quad(a \neq 0)$について，$x = -1$での接線の傾きが−2 になるときの接線と$x = 1$での接線の傾きが 2 になるときの接線との交点の座標を求めよ．

1.23　つぎの関数$z = f(x, y)$について，x およびy で偏微分せよ

①　x^2y^2 ② $\log_y x$ ③　$x^y y^x$

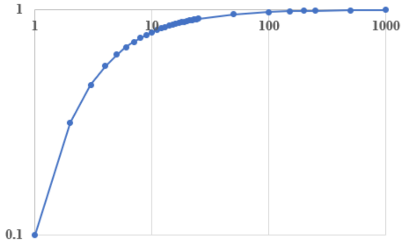
1.24　$z = f(x^2+y^2)$ について，z をx およびy で偏微分し,．関数 f を消去しなさい．

（ヒント：$u = x^2 + y^2 \quad\Rightarrow\quad u_x = 2x \quad\Rightarrow\quad z_x = 2xf'(u)$ ）

第１章　演習問題解答

1.1　$0<p<1$ の場合　$\lim_{n\to\infty} p^{1/n} = 1-0$

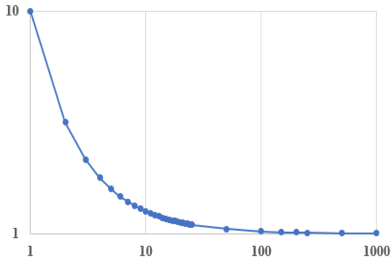
例えば，$p=0.1$ で，n が 1 から 1000 までのグラフは，



$p=1$ の場合は，$\lim_{n\to\infty} p^{1/n} = 1$ が明らかである．

$p>1$ の場合は，$\lim_{n\to\infty} p^{1/n} = 1+0$

例えば，$p=10$ で，n が 1 から 1000 までのグラフは，

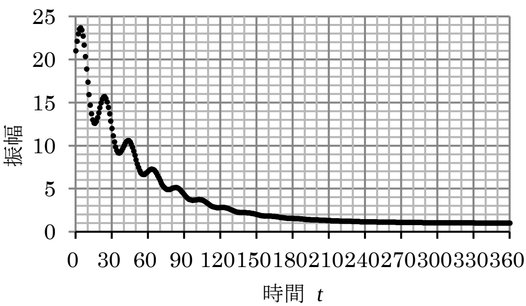


であり，$p>0$ で $\lim_{n\to\infty} p^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$

1.2　図 **1.1.2-1** のグラフは右の図であった．

式 1.1.2-4，$A = \left(e^{-0.03t}\cdot 5\sin(2\pi t/20) + p\right) + \left(Be^{-t/50}\right)$ を考えたとき，まず，t=0 とすれば，$p(t=0) = p + B = 21$ であることが分かる．上下に振動する正弦波部の部分は，$\varphi(t) = \sin(2\pi t/20)$ は t=0 で 0 であり，式 1.1.2-4 の第 1 項で p だけが残こる．したがって，仮に，$p=1, B=20$ としてグラフを描くと題の図と一致するp．例えば，だけを増減すれば，図が上下するだけであるが，B を変化させると図の減衰する様相が変化する．

従って，答えは　$p=1, B=20$．



1.3　フィボナッチス数列の一般項の求め方は，線形代数学の本では定番として掲載されている．フィボナッチス数列は，

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ ; \ a_1 = a_2 = 1, \qquad (1)$$

の関係を満たす．すなわち，$a_1 = a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3,\ a_5 = 5,\ a_6 = 8, \cdots$ である．ここで，式（1）を変形して，

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \qquad (2)$$

と変形して，さらに，階差数列という数列は，一般に，

$$a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n) \qquad (3)$$

と書けるが，この式は，

$$a_{n+2} - (p+q)a_{n+1} + pqa_n = 0 \qquad (4)$$

と変形できる．式（2）と式（3）を比較すると，

$$p + q = 1 \ ; \ pq = -1 \qquad (5)$$

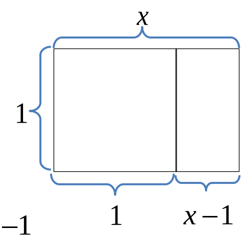
である．このとき，

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad (6)$$

をフィボナッチス数列，式（2）の特性方程式という．式（6）の解は，勿論，

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad (7)$$

である．さて，黄金比というのは，幾何的に以下の図の $x:1$ のことで，この比は最も美しい比で，国旗の縦横もこの比です．さて，図によれば，



$$x:1 = 1:(x-1)$$

である．この式は，

$$x(x-1) = 1 \quad \therefore \quad x^2 - x - 1 = 0 \qquad (8)$$

となるが，式（8）は式（6）と同じである．

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \ , \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1$$

ですから，

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ , \ q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

とする．式（3）は漸化式であり，また，式（5）から $p = 1-q, q = 1-p$ であり，

$$a_{n+1} - pa_n = q^{n-1}(1-p) = q^n \ , \ a_{n+1} - qa_n = p^{n-1}(1-q) = p^n$$

となる．したがって，

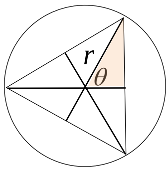
$$a_n = \frac{p^n - q^n}{p - q} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

という一般項が得られる．また，黄金比は，上図のようであれば，

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

である．

1.4 内接する n 角形の面積を${}^{in}S_n$ および外接する n 角形の面積を${}^{out}S_n$とするとき，${}^{in}S_n$ および ${}^{out}S_n$ を n と半径 r で表現する．まず，円に内接する三角形の面積 ${}^{in}S_3$ は，図(1)に示したように，6 個分の三角形の面積の和として



$$ {}^{in}S_3 = 6\times\left(\frac{1}{2}r\cos\theta\times r\sin\theta\right)=\frac{6}{2}\frac{1}{2}r^2\left(2\sin\theta\cos\theta\right)=\frac{3}{2}r^2\sin 2\theta $$

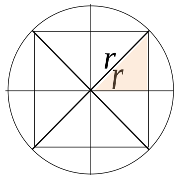
となり，ここで θ は $\pi/3$ であるから，

$$ {}^{in}S_3 = \frac{3}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{3} $$

と計算できる．次に，${}^{in}S_4$ は，8 個分の三角形の面積の和として

$$ {}^{in}S_4 = 8\times\left(\frac{1}{2}r\cos\theta\times r\sin\theta\right)=\frac{8}{2}\frac{1}{2}r^2\left(2\sin\theta\cos\theta\right)=\frac{4}{2}r^2\sin 2\theta $$

となり，ここで θ は $\pi/4$ であるから，



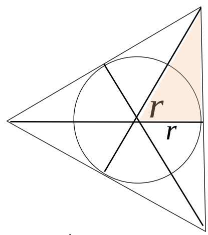
$$ {}^{in}S_4 = \frac{4}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{4} $$

と計算できる．したがって，

$$ {}^{in}S_n = \frac{n}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n} $$

と計算できるここで，マクローリン展開を用いた sin 関数の定義を用いれば

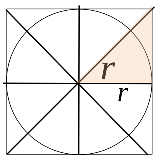
$$ \lim_{n\to\infty}{}^{in}S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}r^2\left(\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right) $$
$$ =\lim_{n\to\infty}r^2\left(\frac{n}{2}\left(\frac{2\pi}{n}-\left(\frac{2\pi}{n}\right)^3+\left(\frac{2\pi}{n}\right)^5\right)-\cdots\right)=\pi r^2 $$



となる．一方，${}^{out}S_3$ は 6 個分の三角形の面積の和として，

$$ {}^{out}S_3 = 6\times\left(\frac{1}{2}\times r\times r\tan\theta\right)=3r^2\tan\theta\Rightarrow 3r^2\tan\frac{\pi}{3} $$

であり，${}^{out}S_4$ は，同様に，8 個分の三角形の面積の和として



$$ {}^{out}S_4 = 8\times\left(\frac{1}{2}\times r\times r\tan\theta\right)=4r^2\tan\theta\Rightarrow 4r^2\tan\frac{\pi}{4} $$

と書ける．したがって，円に外接する n 角形の面積は，

$$ {}^{out}S_n = nr^2\tan\frac{\pi}{n} $$

となる．マクローリン展開を用いた tan 関数の定義を用いれば

$$ \lim_{n\to\infty}{}^{out}S_n = \lim_{n\to\infty}\left(nr^2\tan\frac{\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(nr^2\left(\frac{\pi}{n}+\left(\frac{\pi}{n}\right)^3+\cdots\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\pi r^2+r^2\frac{\pi^3}{n^2}+\cdots\right)=\pi r^2 $$

故に，円の面積 S は，n 角形の収束から，

$$ \lim_{n\to\infty}{}^{in}S_n\left(=\pi r^2\right)<S<\lim_{n\to\infty}{}^{out}S_n\left(=\pi r^2\right)\quad\therefore\quad S=\pi r^2 $$

1.5 オイラー公式は $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ であるから，$\le\theta\le 2\pi$ の範囲内で，

$$i=\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)=e^{i(\pi/2)}$$ であるから，

$$i^2=\left(e^{i(\pi/2)}\right)^2=e^{i\pi}=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1$$

1.6 $z=a+ib$ に i をかけると z_i になるとすると，

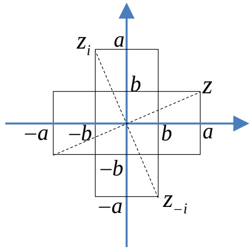
$z_i=(a+ib)\times i=-b+ia$ であり，

-i をかけると z_{-i} になるとすると

$z_{-i}=(a+ib)\times(-i)=b-ia$ となるので，

右図のように i をかけると 90 度左回転し，

- i をかけると 90 度右回転する．



1.7 式 1.3.4-4 と式 1.3.5-6 とは，それぞれ，

(1) $$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$ (2) $$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=\sum_n^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)$$

である．そこで，式（1）について，二項定理を用いると，

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

と置くと，

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n={}_n\mathrm{C}_0 1+{}_n\mathrm{C}_1 1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^1+{}_n\mathrm{C}_2 1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}1^1\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n 1^0\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}+\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}$$

となるので，

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}f(n)=\sum_n^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)$$

1.8 (1) $y=a^x\Rightarrow\log y=x\log a\Rightarrow y'/y=\log a$ だから，$y'=a^x\log a$

(2) $y=x\log x\Rightarrow y'=x'\log x+x(\log x)'=\log x+1$

(3) $$y=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow y'=\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

(4) $$y=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\Rightarrow y'=\frac{(\sqrt{x}-1)'(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)'}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

(5) $y=A\sin(\omega t-kx)\Rightarrow y'=A(-k)\cos(\omega t-kx)$

(6) $y=\cos^{-1}x\Rightarrow x=\cos y$ として計算する．$0<y<\pi,-1<x<1$ で議論する．

このとき，$\sin y>0$ であり，$dx/dy=-\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$ となるから，

$y' = -1\Big/\sqrt{1-x^2}$ である．

(7) $y = \cos^{-1}(\sin x) \Rightarrow y' = -\dfrac{(\sin x)'}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$

(8) $y = e^{\sin x} \Rightarrow y' = (\sin x)' e^{\sin x} = \cos x e^{\sin x}$

(9) $y = x^x \Rightarrow \log y = x \log x \Rightarrow y'/y = x' \log x + x(\log x)' = \log x + 1 \;\therefore\; y' = x^x(\log x + 1)$

(10) $y = \sin^{-1}(\cos x) \Rightarrow y' = \dfrac{(\cos x)'}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$

1.9 数学的帰納法で題意を証明する．

n=1 の場合，

$$\left(e^{ix}\right)' = ie^{ix} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)e^{ix} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}e^{ix} = e^{i\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

n=k の場合に成り立つとする．したがって，

$$\left(e^{ix}\right)^{(k)} = \cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right) = e^{i\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)}$$

n=k+1 の場合，

$$\left(e^{ix}\right)^{(k+1)} = \left\{\left(e^{ix}\right)^{(k)}\right\}' = \left\{e^{i\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)}\right\}' = ie^{i\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}e^{i\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)} = e^{i\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)}$$

$$= \cos\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right) + i\sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \cos^{(k+1)} x = \cos\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right), \qquad \sin^{(k+1)} x = \sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

n=k+1 の場合も成り立つ．したがって，題意は証明された．

1.10 $y = \arcsin x$ は，$x = \sin y$ と書いて，定義域が $\pi/2 < y < \pi/2$ ，値域が $-1 < x < 1$ である場合の値である．このとき，$\cos y > 0$ である．したがって，

$x = \sin y \Rightarrow dx/dy = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

$\therefore\quad dy/dx = d(\arccos x)/x = 1/\cos y = 1\Big/\sqrt{1-x^2}$

1.11 $y = \arccos x$ は，$x = \cos y$ と書いて，定義域が $0 < y < \pi$ で値域が $-1 < x < 1$ である場合の値である．このとき, $\sin y > 0$ である．したがって

$x = \cos y \Rightarrow dx/dy = -\sin y \Rightarrow dy/dx = -1/\sin y$

$\therefore\quad dy/dx = d(\arccos x)/dx = -1/\sin y = -1\Big/\sqrt{1-\cos^2 y} = -1\Big/\sqrt{1-x^2}$

1.12 $y = \arctan x$ は，$x = \tan y$ と書いて，定義域が $-\pi/2 < y < \pi/2$, 値域が $-\infty < x < \infty$ である場合の値である．このとき, $\cos y > 0$ であるから，

$x = \tan y \Rightarrow dx/dy = 1/\cos^2 y = \tan^2 y + 1 = x^2 + 1$

$(\because\quad \sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \tan^2 y + 1 = 1/\cos^2 y)$

$\therefore\quad dy/dx = d(\arctan x)/dx = 1/(dx/dy) = 1/(x^2+1)$

1.13 $y = \mathrm{arc}\cot x$ は, $x = \cot y$ と書いて，定義域が $0 < y < \pi$ で値域が $-\infty < x < \infty$ である である場合, $\sin y > 0$ であるから，

$$dx/dy = d(\cot y)/dy = d(\cos y/\sin y)/dy$$
$$= (-\sin^2 y - \cos^2 y)/\sin^2 y = -1/\sin^2 y$$
$$\therefore \quad dy/dx = -\sin^2 y$$
$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow 1 + (\cos y/\sin y)^2 = 1 + \cot^2 y = 1/\sin^2 y$$
$$\therefore \quad dy/dx = -1/(1 + x^2)$$

1.14 $y = u^v$ とおけば，$\log y = v \log u \Rightarrow d(\log y) = d(v \log u)$ であり，両辺を微分して

$$y'/y = v(u'/u) + v' \log u$$
$$\therefore \quad y' = (u^v)v(u'/u) + (u^v)(v' \log u) = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \log u \cdot v'$$

1.15 $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$　r >0　で

$$y/x = r\sin\theta/r\cos\theta = \sin\theta/\cos\theta = \tan\theta \quad \therefore \quad \theta = \tan^{-1}(y/x)$$

次に，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ だから，

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$$

また，$x = r\cos\theta$ だから，

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \quad \therefore \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

である．

1.16 本文例題 1.5.2.3 の解答には不備がある．実際，例題の解答のような証明を書く本がある．しかし，以下に書く証明が一般的である．どちらが正しいか考えてほしい．

関数 u を x と y の関するとする，すなわち $u(x, y) \Rightarrow u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ となる場合，u のラプラシアンは，

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

である．このとき，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

と計算する．ここで，r について，

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

であるから，

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\theta$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

である．また，θ について，

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

であるから，

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{y}{r^2}=-\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r}$$

したがって，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

故に，

$$\begin{aligned}\nabla^2u&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\\&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\theta\right)\frac{\partial u}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\\&\quad+\left(\frac{\partial}{\partial y}\sin\theta\right)\frac{\partial u}{\partial r}+\sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\end{aligned}$$

ここで，

$$\frac{\partial}{\partial x}\cos\theta=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'}{x^2+y^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{y}{r}\right)^2=\frac{\sin^2\theta}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2}{r^2}\frac{x}{r}\frac{y}{r}=\frac{2}{r^2}\cos\theta\sin\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sin\theta=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{r}\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{1}{r}\cos^2\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\frac{2}{r^2}\frac{x}{r}\frac{y}{r}=-\frac{2}{r^2}\cos\theta\sin\theta$$

となる．また，

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\cos\theta\frac{\partial^2u}{\partial r^2}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2u}{\partial\theta\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=\cos\theta\frac{\partial^2u}{\partial r\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\sin\theta\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2u}{\partial\theta\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=\sin\theta\frac{\partial^2u}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}$$

であるから

$$\nabla^2u=\left(\frac{1}{r}\sin^2\theta\right)\frac{\partial u}{\partial r}+\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2u}{\partial r^2}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2u}{\partial\theta\partial r}\right)$$

$$
+\left(\frac{2}{r^2}\cos\theta\sin\theta\right)\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{r}\left(\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)
$$

$$
+\left(\frac{1}{r}\cos^2\theta\right)\frac{\partial u}{\partial r}+\sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}\right)
$$

$$
+\left(-\frac{2}{r^2}\cos\theta\sin\theta\right)\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r}\left(\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)
$$

となり，これを整理すると,

$$
\Delta u=\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}
$$

が得られる.

1.17 $f(x)$に関するマクローリン級数展開は,

$$
f(x)=f(0)+(x/1\,!)f'(0)+(x^2/2\,!)f''(0)+\cdots+(x^n/n\,!)f^{(n)}(0)+\cdots
$$

である．したがって，この問題では，本来 $f(x)=\sqrt{x}$ の 3 階微分まで計算必要である. すなわち, $\sqrt{x}$の微分は, $f(x)=\sqrt{x}$ とすれば,

$$
f'(x)=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},
$$

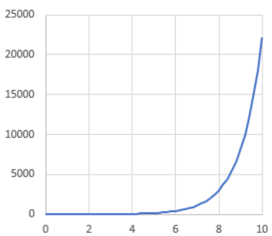
$$
f''(x)=\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}
$$

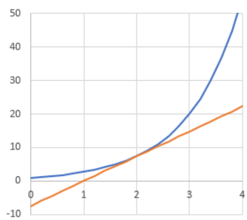
$$
f^{(3)}(x)=\left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right)'=\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}
$$

$$
f^{(4)}(x)=\left(\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\right)'=\left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}-1}=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}
$$

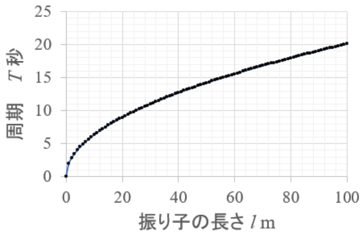
となり， $\sqrt{x}$微分は, 常に,$\sqrt{x}$の累乗がマイナスとなるので, すべての微係数は $x=0$ のとき，定義できない．したがって,，本問題の解答は，マクローリン級数展開が成立しないので，解はない.

1.18 $y=e^x\ (0\le x\le 10)$ の図　$x=2$ での接線の図　接線の式：$y=e^2(x-1)$





1.19 紐の長さ l=100cm, g=9.8m/s^2,として，100cm から 0cm まで変化させて計算した振り子の周期の変化を図に書くと，右図のようになる.



1.20

1)

$$\mathbf{b}^T\,\mathbf{Pa} = (b_1\,,\,b_2\,,\,b_3)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (b_1\,,\,b_2\,,\,b_3)\begin{pmatrix} a_1p_{11}+a_2p_{12}+a_3p_{13} \\ a_1p_{21}+a_2p_{22}+a_3p_{23} \\ a_1p_{31}+a_2p_{32}+a_3p_{33} \end{pmatrix}$$

$$= b_1(a_1p_{11}+a_2p_{12}+a_3p_{13})+b_2(a_1p_{21}+a_2p_{22}+a_3p_{23})+b_3(a_1p_{31}+a_2p_{32}+a_3p_{33})$$

$$= a_1(p_{11}b_1+p_{21}b_2+p_{31}b_3)+a_2(p_{12}b_1+p_{22}b_2+p_{32}b_3)+a_3(p_{13}b_1+p_{23}b_2+p_{33}b_3)$$

$$= (a_1\,,\,a_2\,,\,a_3)\begin{pmatrix} p_{11}b_1+p_{21}b_2+p_{31}b \\ p_{12}b_1+p_{22}b_2+p_{32}b_3 \\ p_{13}b_1+p_{23}b_2+p_{33}b \end{pmatrix} = (a_1\,,\,a_2\,,\,a_3)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{a}^T\mathbf{P}^T\mathbf{b} = \mathbf{a}^T\left(\mathbf{b}^T\mathbf{P}\right)^T$$

2) $$\frac{d(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{d\mathbf{a}} = \frac{d(\mathbf{ba})}{d\mathbf{a}} = \frac{d}{d\mathbf{a}}(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

$$= \mathbf{e}_1\frac{d}{da_1}(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+\mathbf{e}_2\frac{d}{da_2}(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+\mathbf{e}_3\frac{d}{da_3}(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

$$= b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{b}$$

3) $$\frac{d(\mathbf{Pa})}{d\mathbf{a}} = \frac{d}{d\mathbf{a}}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{d}{d\mathbf{a}}\begin{pmatrix} a_1p_{11}+a_2p_{12}+a_3p_{13} \\ a_1p_{21}+a_2p_{22}+a_3p_{23} \\ a_1p_{31}+a_2p_{32}+a_3p_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{da_1}(a_1p_{11}+a_2p_{12}+a_3p_{13}) & \frac{d}{da_1}(a_1p_{21}+a_2p_{22}+a_3p_{23}) & \frac{d}{da_1}(a_1p_{31}+a_2p_{32}+a_3p_{33}) \\ \frac{d}{da_2}(a_1p_{11}+a_2p_{12}+a_3p_{13}) & \frac{d}{da_2}(a_1p_{21}+a_2p_{22}+a_3p_{23}) & \frac{d}{da_2}(a_1p_{31}+a_2p_{32}+a_3p_{33}) \\ \frac{d}{da_3}(a_1p_{11}+a_2p_{12}+a_3p_{13}) & \frac{d}{da_3}(a_1p_{21}+a_2p_{22}+a_3p_{23}) & \frac{d}{da_3}(a_1p_{31}+a_2p_{32}+a_3p_{33}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{P}^T$$

コメント）定義にもよりますが，ベクトル $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$，$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ の場合， $d\mathbf{y}/d\mathbf{x} = \{dy_j/dx_i\}$ で表す $m\times n$型の行列になる．と言う定義をここでは使用している.

4）

$$\frac{d\left(\mathbf{a}^T\mathbf{P}\mathbf{b}\right)}{d\mathbf{a}}=\frac{d}{d\mathbf{a}}\left(\left(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\right)^T\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}\right)$$

$$=\frac{d}{d\mathbf{a}}\left(\left(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\right)^T\begin{pmatrix}b_1p_{11}+b_2p_{12}+b_3p_{13}\\ b_1p_{21}+b_2p_{22}+b_3p_{23}\\ b_1p_{31}+b_2p_{32}+b_3p_{33}\end{pmatrix}\right)$$

$$=\frac{d}{d\mathbf{a}}\begin{pmatrix}a_1\left(b_1p_{11}+b_2p_{12}+b_3p_{13}\right)\\ \quad +a_2\left(b_1p_{21}+b_2p_{22}+b_3p_{23}\right)\\ \qquad +a_3\left(b_1p_{31}+b_2p_{32}+b_3p_{33}\right)\end{pmatrix}$$

$$=\mathbf{e}_1\left(b_1p_{11}+b_2p_{12}+b_3p_{13}\right)+\mathbf{e}_2\left(b_1p_{21}+b_2p_{22}+b_3p_{23}\right)+\mathbf{e}_3\left(b_1p_{31}+b_2p_{32}+b_3p_{33}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}b_1p_{11}+b_2p_{12}+b_3p_{13}\\ b_1p_{21}+b_2p_{22}+b_3p_{23}\\ b_1p_{31}+b_2p_{32}+b_3p_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\mathbf{P}\mathbf{b}$$

$$\frac{d\left(\mathbf{a}^T\mathbf{P}\mathbf{b}\right)}{d\mathbf{b}}=\frac{d}{d\mathbf{b}}\left(\left(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\right)^T\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}\right)$$

$$=\frac{d}{d\mathbf{b}}\left(\left(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\right)^T\begin{pmatrix}b_1p_{11}+b_2p_{12}+b_3p_{13}\\ b_1p_{21}+b_2p_{22}+b_3p_{23}\\ b_1p_{31}+b_2p_{32}+b_3p_{33}\end{pmatrix}\right)$$

$$=\frac{d}{d\mathbf{b}}\begin{pmatrix}a_1\left(b_1p_{11}+b_2p_{12}+b_3p_{13}\right)\\ \quad +a_2\left(b_1p_{21}+b_2p_{22}+b_3p_{23}\right)\\ \qquad +a_3\left(b_1p_{31}+b_2p_{32}+b_3p_{33}\right)\end{pmatrix}$$

$$=\mathbf{e}_1\left(a_1p_{11}+a_2p_{21}+a_3p_{31}\right)+\mathbf{e}_2\left(a_1p_{12}+a_2p_{22}+a_3p_{32}\right)+\mathbf{e}_3\left(a_1p_{13}+a_2p_{23}+a_3p_{33}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}a_1p_{11}+a_2p_{21}+a_3p_{31}\\ a_1p_{12}+a_2p_{22}+a_3p_{32}\\ a_1p_{13}+a_2p_{23}+a_3p_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{21} & p_{31}\\ p_{12} & p_{22} & p_{32}\\ p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}=\mathbf{P}^T\mathbf{a}$$

5）

$$\frac{d\left(\mathbf{a}^T\mathbf{P}\mathbf{b}\right)}{d\mathbf{P}}=\frac{d}{d\mathbf{P}}\begin{pmatrix}q=a_1\left(b_1p_{11}+b_2p_{12}+b_3p_{13}\right)\\ \quad +a_2\left(b_1p_{21}+b_2p_{22}+b_3p_{23}\right)\\ \qquad +a_3\left(b_1p_{31}+b_2p_{32}+b_3p_{33}\right)\end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} \dfrac{dq}{dp_{11}} & \dfrac{dq}{dp_{12}} & \dfrac{dq}{dp_{13}} \\ \dfrac{dq}{dp_{21}} & \dfrac{dq}{dp_{22}} & \dfrac{dq}{dp_{23}} \\ \dfrac{dq}{dp_{31}} & \dfrac{dq}{dp_{32}} & \dfrac{dq}{dp_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) = \mathbf{ab}^T
$$

1.21　式 1.6.4-15 $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ は式 1.6.4-16 $\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{b}\right)$ とする解と同じであるかと言う問題であり，式 1.6.4-15 の両辺に左から逆行列 $\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}$ を掛ければ式 1.6.4-16 がえられるが，ここでは要素で考える． $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{P}$ とすると，

$$
\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{P} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{A}^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix}
$$

ですから， $\mathbf{x} = (a \quad b)^T$ は，クラーメルの式で式 1.6.4-6 のように求まる．式 1.6.4-16 は， $\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{b}\right)$ と書けるので， $\mathbf{P}^{-1}$ を求める．

$$
\mathbf{P}^{-1} = \tilde{\mathbf{P}} \Big/ |\mathbf{P}| = \begin{pmatrix} n & -\sum_{i=1}^{n} x_i \\ -\sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \Bigg/ \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \right)
$$

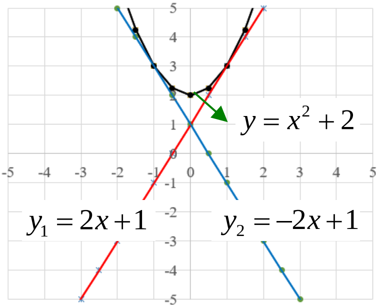
$$
\therefore \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{b}\right) = \begin{pmatrix} n & -\sum_{i=1}^{n} x_i \\ -\sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix} \Bigg/ \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \right)
$$

$$
= \frac{1}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \begin{pmatrix} n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \end{pmatrix}
$$

となる．したがって，題意は証明された．（ここでは，逆行列の計算法を知っていると考えての出題である．）

1.22 $y=ax^2+bx+c$ について，接線が，仮定により，$y'(x=1)=2, y'(x=-1)=-2$ であるから，$a=1$，$b=0$ と求まり，与式は，$y=x^2+C$ となる．これは y 切片が C で最小点が $(0\,,C)$ である y 軸を対称軸とする 2 次関数である．このとき，2 つの接戦の式は，同じ y 切片を持つ，例えば，$y_1=2x+c$，$y_2=-2x+c$ となる．ここで，与式 $y=x^2+C$ は，$x=1$ で接するということは，接線 $y_1=2x+c$ から $c=C-1$と求まる．このとき，2 接線 $y=2x+C-1$，$y=-2x+C-1$ の交点は $(0,C-1)$ である．ただし，C は任意の定数である．

因みに $c=1$の場合 $C=2$であり，2 次関数は，$y=x^2+2$となる．この場合，接線は，$y_1=2x+1$，$y_2=-2x+1$ である（右図参照）．



1.23 $z=f(x,y)$ として，$\partial z/\partial x, \partial z/\partial y$を求める．

（1） $z=f(x,y)=x^2y^2$

$$\partial z/\partial x=\partial(x^2y^2)/\partial x=2xy^2$$

$$\partial z/\partial y=\partial(x^2y^2)/\partial y=2x^2y$$

（2） $z=f(x,y)=\log_x y$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\log_e y}{\log_e x}\right)=(\log_e y)\frac{\partial \log_e x}{\partial x}=\frac{\log_e y}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\log_e y}{\log_e x}\right)=(\log_e y)\frac{\partial \log_e x}{\partial x}=\frac{\log_e y}{x}$$

（3） $z=f(x,y)=x^yy^x=e^{y\log x}e^{x\log y}=e^{y\log x+x\log y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{y\log x+x\log y}\frac{\partial}{\partial x}(y\log x+x\log y)=x^yy^x\left(\frac{y}{x}+\log y\right)$$

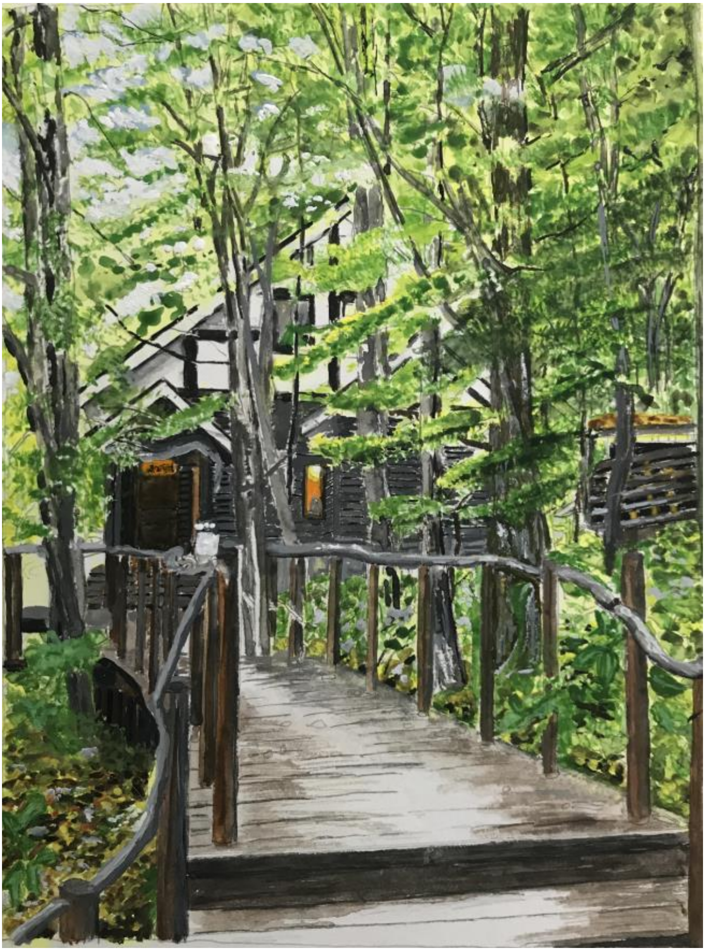
$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{y\log x+x\log y}\frac{\partial}{\partial x}(y\log x+x\log y)=x^yy^x\left(\log x+\frac{x}{y}\right)$$

1.24 $z=f(x^2+y^2)=f(u)$ 　　$z_x=2xf'(u)$ 　　$z_y=2yf'(u)$

$$2yz_x=2xz_y \quad \therefore \quad \frac{z_x}{x}=\frac{z_y}{y}$$

2. 積分

積分

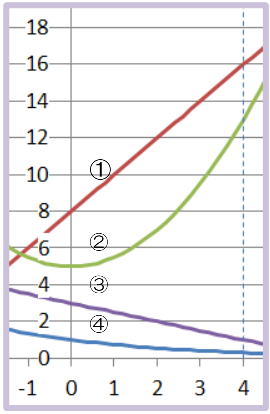


第 2 章　演習問題

2.1　数字 1 の原始関数を示せ．

2.2　時間 t の関数として，位置 $x(t)$，速度 $v(t)$，加速度 $\alpha(t)$ が与えられているとき，以下の①および②の物理的意味を述べよ

$$① \quad x(t)=\int_0^t v(t)dt \quad , \quad ② \quad v(t)=\int_0^t \alpha(t)dt$$



2.3　指数関数 a^x の原子関数を示せ．

2.4　不定積分 $\int (ax+b)^n dx \ \ (n \neq -1)$ を求めよ．

2.5　不定積分 $\int (x+1)^3 dx$ を求めよ．（ヒント：$t=x+1$ とおく）

2.6　不定積分 $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2}$ を求めよ．　（ヒント：$t=\dfrac{x}{a}$ とおく）

2.7　右図の x（$0 \leqq x \leqq 4$）のについて，上部から

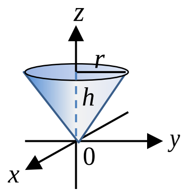
関数①．$y=2x+8$，　　関数②．$y=0.5x^2+5$

関数③．$y=-0.5x+3$，　関数④．$y=e^{-0.3x}$，

である関数の，関数①と関数②の間の面積，関数③と関数④の間の面積をそれぞれ求め，その和から，式 2.3.2-1 が成立することを確かめよ．

2.8　置換積分法で，定積分 $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx \ \ (r>0)$ を求めよ（ヒント：$x=r\cos\theta$ とする）

2.9　置換積分法で，$\int \dfrac{dx}{x^2+c^2}$ を解け．（ヒント：$p=\dfrac{1}{c}x$ とする）



2.10　不定積分 $\int \cos(ax+b)dx$ について変数を置換して求めよ．

2.11　底面の半径 r で高さ h の円錐について，(1)全体積，(2)重心，さらに，(3) z 軸の周りの慣性モーメント I_z をそれぞれ求めよ．（右図を参照）

2.12　部分積分法で，定積分 $\int_1^e x \ln x dx$ を求めよ．ここで，$\ln x = \log_e x$ である．

2.13　二重積分 $\int\int e^{px+qy}dxdy \ \ (pq \neq 0, a \leq x \leq b,\ a \leq y \leq b)$ を求めよ．

2.14　式 $f(x)\delta'(x)$ に部分積分法を適用することにより次式を示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx \quad \text{および} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = -f'(0)$$

第 2 章　演習問題解答

2.1　数字１の原始関数 $f(x)$ は，1 を積分して得られるので，

$$f(x)=\int 1dx = x+C \quad \text{ここで C は積分定数である，}$$

解答は $x+C$ である．ただし，C は任意の定数である．

注：原始関数を定義から $\int 1dx$ と答えても良い．

2.2　①速度の時間変化を考慮した時刻 t までに動いた距離の積算値

②加速度の時間変化を考慮した時刻 t までの速度の積算値

2.3

$$(a^x)' = \lim \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim \frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x \lim \frac{a^h-1}{h}$$

を用いた例題 1.3.4-1（2）により，$d(a^x)/dx = a^x \log a$ であるから，

$$\int d(a^x)/dx = a^x + c = \int a^x \log a dx = \log a \int a^x dx$$

$$\therefore \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad \left(\because \quad C = \frac{c}{\log a} \right)$$

であるから，a^x の原始関数は $\dfrac{a^x}{\log a}+C$ である．ただし，C は積分定数

2.4　定義通り $\displaystyle\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$ ただし，C は積分定数

2.5　ヒントにより $\displaystyle\int (x+1)^3 dx \Leftrightarrow x+1=t \Leftrightarrow \int (t)^3 dt,\ dt=dx$

$$\therefore \quad \int (t)^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C \Leftrightarrow \int (x+1)^3 dx = \frac{1}{4}(x+1)^4 + C$$

ただし，C は積分定数

2.6　$t = x/a$ とおけば，$adt = dx$ であり，

$$\int \frac{adt}{(ta)^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

を用いると，$t=\tan\theta$ とおけば，$dt = d\theta/\cos^2\theta$ であり，

$$\int \frac{1}{t^2+1^2}dt = \int \frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int \cos^2\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \theta + c = \tan^{-1} t + c$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

ただし，C は積分定数

別解）$x=\tan\theta$ とおいて，x で微分すれば

$$1 = \frac{d\theta}{dx}\frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \frac{d\theta}{dx} = \cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+x^2}$$

となる．この式を用いても良い．

2.7　略（高校の問題）

2.8　$\int (ax+b)^n dx \Rightarrow ax+b=t,\ adx=dt$ とすれば,

$$\Rightarrow \int t^n \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int t^n dt = \frac{1}{a(n+1)} t^{n+1} + C \quad \therefore \quad \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$$

ただし, C は積分定数

2.9　2.6 と同じように, $cp = x \Rightarrow cdp = dx$ とすれば,

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{x^2+c^2} \Rightarrow \int \frac{cdp}{(cp)^2+c^2} = \frac{1}{c}\int \frac{dp}{p^2+1} = \frac{1}{c}\tan^{-1} p \Rightarrow \frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{x}{c} + C$$

ただし, C は積分定数

2.10　$ax+b=p \Rightarrow adx=dp$　と置換すれば,

$$\int \cos(ax+b)dx \Rightarrow \int \cos p\left(\frac{1}{a}dp\right) = \frac{1}{a}\int \cos p dp = \frac{1}{a}\sin p + C = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

ただし, C は積分定数,

2.11 (1)　$0 \le p \le h$ である p を考えると $p+dp$ の厚さの円盤は，点 p における半径を Rp とすると $(h-p):h = R_p : r$ と表せるから，$R_p = r(h-p)/h$ なので，したがって，z 軸上の，点 p における円盤の体積は, $\pi R_p{}^2 dp$ であるから，円錐の体積 V は，次式で求まる.

$$V = \int_0^h \pi R_p{}^2 dp = \int_0^h \pi\left(\frac{r(h-p)}{h}\right)^2 dp = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

(2) 重心 h_G は，（1）の結果を用いて計算する．円錐は z 軸を中心とした回転体である．このとき，重心 h_G は z 軸上にある．したがって，点 p における円盤の面積 $S(p)$ および全体積 V を用いて，重心 h_G は,

$$h_G = \frac{\int_0^h pS(p)dp}{V} = \frac{\int_0^h p\pi\left(\frac{r(h-p)}{h}\right)^2 dp}{\frac{\pi r^2 h}{3}} = \frac{\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h p(h-p)^2 dp}{\frac{\pi r^2 h}{3}} = \frac{\frac{\pi r^2}{h^2}\frac{h^4}{12}}{\frac{\pi r^2 h}{3}} = \frac{h}{4}$$

と求められ，重心 h_G は h の 1/4 の位置である.

(3)　ここでは z 軸方向の慣性モーメントを求める.「慣性」は英語で「*Inertia*」なので I を用いることが多い．ここで，円錐の質量を M とすると，密度 ρ は,

$$\rho = M/V = M/(\pi r^2 h/3) = 3M/\pi r^2 h$$

したがって，p の位置での円盤の質量 Δm (厚さ Δp) は, $\Delta V = \pi R_p{}^2 \Delta p$ なので

$$\Delta m = \rho\Delta V = \frac{3M}{\pi r^2 h}\pi R_p{}^2 \Delta p = \frac{3MR_p{}^2}{r^2 h}\Delta p$$

であり，したがって，z 軸方向の慣性モーメントは，微小円盤について

$$\Delta I = \frac{1}{2}R_p{}^2 \Delta m = \frac{1}{2}R_p{}^2 \frac{3MR_p{}^2}{r^2 h}\Delta p = \frac{3MR_p{}^4}{2r^2 h}\Delta p$$

なので

$$I_z=\int_0^h \Delta I=\int_0^h \frac{3MR_p{}^4}{2r^2h}dp=\int_0^h \frac{3M}{2r^2h}\left(\frac{rp}{h}\right)^4 dp$$

$$=\frac{3Mr^2}{2h^5}\int_0^h p^4dp=\frac{3Mr^2}{2h^5}\frac{h^5}{5}=\frac{3}{10}Mr^2 \quad \therefore \quad I_z=\frac{3}{10}Mr^2$$

2.12 $FG=\left(\frac{1}{2}x^2\right)\cdot\ln x$ とすれば，$(FG)'=F'G+FG'=x\ln x+\left(\frac{1}{2}x\right)$ だから，

$$\int_1^e x\ln x dx=\left[\left(\frac{1}{2}x^2\right)\cdot\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\left(\frac{e^2}{2}\right)-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2}{4}$$

2.13 $\iint e^{px+qy}dxdy\Rightarrow\int_a^b\left[\int_a^b e^{px+qy}dx\right]dy=\int_a^b\left[\frac{e^{px+qy}}{p}\right]_a^b dy=\int_a^b\left(\frac{e^{pb+qy}}{p}-\frac{e^{pa+qy}}{p}\right)dy$

$$=\frac{1}{pq}\left(e^{pb+qb}-e^{pa+qb}-e^{pb+qa}+e^{pa+qa}\right)=\frac{e^{b(p+q)}-e^{pa+qb}-e^{pb+qa}+e^{a(p+q)}}{pq}$$

別解 $\iint e^{px+qy}dxdy\Rightarrow\left(\int_a^b e^{px}dx\right)\left(\int_a^b e^{qy}dy\right)=\frac{e^{pb}-e^{pa}}{p}\frac{e^{qb}-e^{qa}}{q}$

$$=\frac{e^{pb}e^{qb}-e^{pa}e^{qb}-e^{pb}e^{qa}+e^{pa}e^{qa}}{pq}=\frac{e^{b(p+q)}-e^{pa+qb}-e^{pb+qa}+e^{a(p+q)}}{pq}$$

2.14 $[f(x)\delta(x)]'=f'(x)\delta(x)+f(x)\delta'(x)$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx=[f(x)\delta(x)]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx$$

ここで，$x\neq 0$ ならば $\delta(x)=0$ であり，

$$\delta(x)=0\begin{cases} x\to\infty \\ -x\to\infty\end{cases}$$

なので，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx$$

ただし，$x=0$ の場合は，$\delta(x)=\infty$ であるから，与式は成立しない．

さて，δ 関数の定義は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx=f(a)$$

であり，これを用いれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x-0)dx=-f'(0)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx=-f'(0)$$

ただし，$f'(x)$ が連続関数である場合に成り立つ．

微分方程式

演習問題　第 3 章

3.1　c を定数とする次の曲線群の直交曲線群を求めよ

(1) $xy = c$　(2) $y^2 = 2(x + c)$

3.2　c を定数とする円群 $(x - c)^2 + y^2 = c^2$ の直交曲線群を求め，グラフを描け．

3.3　コーシーの微分方定式：$x^2 y'' - xy' + y = 0$ を解け

3.4　コーシーの微分方定式：$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$ を解け

3.5　式 3.1.11-4 から式 3.1.11-5 を導け．

3.6　位置ベクルを $\mathbf{r} = (r_x, r_v, r_z)^T$ とするとき，この位置での速度ベクトル $\mathbf{V}$ を求めよ．

3.7　ベクトル $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ および $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ について，

(1) $\dfrac{d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})}{dt} = \dfrac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \cdot \dfrac{d\mathbf{q}}{dt}$ を証明せよ

(2) $\dfrac{d(\mathbf{p} \times \mathbf{q})}{dt} = \dfrac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \dfrac{d\mathbf{q}}{dt}$ を証明せよ

3.8　ナブラ ∇ に関する次式を証明せよ．（ただし，ϕ：スカラー；$\mathbf{p}$，$\mathbf{q}$：三次元ベクトルであるとする）

(1) $\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = \Delta \phi$

(2) $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$

(3) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{p}) = 0$

(4) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{p}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{p}) - \nabla^2 \mathbf{p}$

(5) $\nabla \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \mathbf{q} \cdot \nabla \times \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \nabla \times \mathbf{q}$

3.9　ナブラ ∇ に関する上記の 1)〜5)の問題を grad, div, rot の表現を用いて書き換えよ．ただし，∇^2 は Δ と書いてよい．

3.10　2 つのベクトル $\mathbf{a}$ および $\mathbf{b}$ がともに渦が無い場のベクトルならば，すなわち，$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ および $\nabla \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ であるならば，$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の発散は無い，すなわち，$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ であることを証明せよ．

3.11　偏微分方程式　$x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$ の一般解を求めよ．

3.12　偏微分方程式　$x^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} - xy \dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$ の一般解を求めよ．

第 3 章　演習問題解答

3.1 (1) $xy = c \Rightarrow y = c/x \Rightarrow y' = -c/x^2$ であるから，

求める直交関数の微分係数は，$y' = x^2/c \Rightarrow c = x^2/y'$

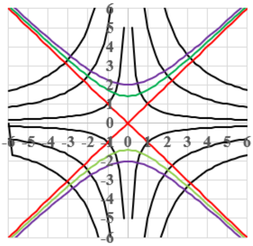
となる．そこで，$c = x^2/y'$ として，定数 c を消去して，

$$y = (x^2/y') \times (1/x) \Rightarrow ydy = xdx \Rightarrow y^2 - x^2 = K$$

したがって，直交曲線として双曲線または直交直線の式

を得る．右図は赤，緑，紫が求める直交曲線の例で，定数

K を 0，2，4 と変更して描いた．

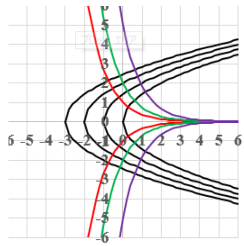


(2) $y^2 = 2(x+c) \Rightarrow yy' = 1 \Rightarrow y' = 1/y$

$\therefore\quad y' = -y \Rightarrow \log|y| = -x \Rightarrow y = \pm Ce^{-x}$

右グラフで黒線は問題の式で，色が付いた 2 の曲線は，

C を 0，2，5 としたときの解である．



3.2 $(x-c)^2 + y^2 = c^2 \Rightarrow 2(x-c) + 2yy' = 0$

$$\Rightarrow X + yy' = 0\,; X = x - c \Rightarrow y' = -\frac{X}{y} \Rightarrow \hat{y}' = \frac{y}{X}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{y}'}{y} = \frac{d(x-c)}{x} \Rightarrow \log|\hat{y}'| = \log|x-c| + C$$

$$\Rightarrow y = \pm e^C (x-c)$$

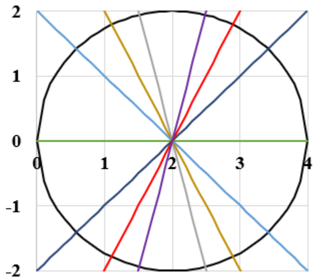
$$\therefore\quad y = \pm k(x-c)\ \ \forall k \in \mathbb{R}$$

となる．これは，与式の円の中心を

通る任意の直線群である．

右図で c を 2，k を 0 と $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ として，

7 本の円の直交曲線を描いた．



3.3 補助方程式が重根を持つ例 1

140 ページに書かれているように，コーシーの微分方程式はオイラーの微分方程式であり，$A_2 x^2 y'' + A_1 xy' + A_0 y = 0$ について解が得られている．

与式の微分方程式 $x^2 y'' - xy' + y = 0$ とオイラーの方程式と比べると

$$A_2 = 1,\ A_1 = -1,\ A_0 = 1$$

である．問題の式で $y = x^k (\neq 0)$ とおくと，補助方程式は，

$$k(k-1)x^k - kx^k + x^k = (k-1)^2 x^k = 0 \quad \therefore\quad k = 1$$

となり，k に関して重根を持つ．したがって，この場合，解は，

$$y = (C_1 + C_2 \log|x|)x$$

となる．ただし，C_1, C_2 は任意の定数．（実際に，上記解を与式に入れて，計算すると，式が成立することが分かる）ちなみに，　$t = \log x$ と置いて解く方法もある．

3.4 補助方程式が重根を持つ例 2

140 ページに書かれているように，コーシーの微分方程式はオイラーの微分方程式であり，$A_2x^2y''+A_1xy'+A_0y=0$ について解が得られている．

与式の微分方程式は，$x^2y''-5xy'+9y=0$ とオイラーの方程式と比べると

$$A_2=1,\ A_1=-5,\ A_0=9$$

である．問題の式で $y=x^k(\neq 0)$とおくと，補助方程式は，

$$k(k-1)x^k-5kx^k+9x^k=(k-3)^2x^k=0 \quad \therefore \quad k=3$$

となり，k に関して重根を持つ．したがって，この場合，解は，

$$y=(C_1+C_2\log|x|)x^3$$

3.5 略　ヒント）これはリカッチの微分方程式に関する問題である．式 3.1.11-4 とは，

$$d\xi/dx-\{Q(x)+2y_\varphi R(x)\}=R(x)$$

であり，問題は，この式から，

$$\xi=e^{\beta}\left(\int R(x)e^{-\beta}dx+C\right),\quad \beta=\int\{Q(x)+2y_\varphi R(x)\}dx$$

を導出問題である．本書にしたがって，計算する．

3.6
$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(r_x,r_y,r_z)^T=\left(\frac{dr_x}{dt},\frac{dr_y}{dt},\frac{dr_z}{dt}\right)^T=\mathbf{e}_x\frac{dr_x}{dt}+\mathbf{e}_y\frac{dr_y}{dt}+\mathbf{e}_z\frac{dr_z}{dt}=\dot{r}_x\mathbf{e}_x+\dot{r}_y\mathbf{e}_y+\dot{r}_z\mathbf{e}_z$$

などなど，どれでも正解

3.7　略（ヒント：　定義にしたがって計算）

3.8　略（ヒント：　定義にしたがって計算）

3.9　略（ヒント：　定義にしたがって計算）

参考

(1)　$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\ \phi)=\Delta\phi$

(2)　$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ \phi)=\mathbf{0}$

(3)　$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\ \mathbf{p})=0$

(4)　$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \mathbf{p})=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\ \mathbf{p})-\Delta\mathbf{p}$

(5)　$\mathrm{div}(\mathbf{p}\times\mathbf{q})=\mathbf{q}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{p}-\mathbf{p}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{q}$

3.10　3.9 の(5)を用いれば，

$$\mathrm{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{0}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{0}=0-0=0$$

（解答ではゼロ・ベクトル **0** とスカラーの 0 の違いを明確に書くこと）

3.11　$z=C\sqrt{xy}$　ただし，C は任意の定数．

解き方はいろいろあるがその 1 例を以下に示すラグランジェ法による．

本文式 3.4.3-9 によれば，独立な変数 η によって，

$$\frac{dx}{d\eta}=x,\quad \frac{dy}{d\eta}=y,\quad \frac{dz}{d\eta}=z$$

を順に解くと，

$$\frac{dx}{d\eta}=x\Rightarrow\frac{dx}{x}=d\eta\quad,\frac{dy}{d\eta}=y\Rightarrow\frac{dy}{y}=d\eta\quad,\frac{dz}{d\eta}=z\Rightarrow\frac{dz}{z}=d\eta$$

$$\therefore\quad \ln x=\eta+c_1,\quad \ln y=\eta+c_2,\quad \ln z=\eta+c_3$$

ここで，c_1, c_2, c_3 は任意の積分定数．さて，x，y の式から，

$$\ln xy = 2\eta + c_1 + c_2 \quad \Rightarrow \quad \eta = (1/2)(\ln xy - (c_1 + c_2))$$
$$\ln z = (1/2)(\ln xy - (c_1 + c_2)) + c_3 \Rightarrow \ln\left(z/\sqrt{xy}\right) = -(c_1 + c_2)/2 + c_3 = \ln C$$
$$\therefore \quad z = C\sqrt{xy} \quad （C = \exp(-(c_1 + c_2)/2 + c_3)）$$

は，与式の一般解である．ここで，　　　　　　　　　　　　　　　　　．

3.12　$z = \dfrac{y^2}{3x} + C$　ただし，C は任意の定数．

解き方はいろいろあるがその 1 例を以下に示すラグランジェ法による．

例えば，

$$\frac{dx}{d\eta} = x^2, \quad \frac{dy}{d\eta} = -xy, \quad \frac{dz}{d\eta} = -y^2$$

まずはここからです．

$$\frac{dx}{d\eta} = x^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = d\eta \quad \therefore \quad -\frac{1}{x} = \eta + c_1$$
$$\therefore \quad y = \frac{c_2}{x} = -c_2(\eta + c_1)$$
$$\frac{dz}{d\eta} = -y^2 = -c_2{}^2(\eta + c_1)^2 \Rightarrow dz = -c_2{}^2(\eta + c_1)^2 d\eta$$
$$\therefore \quad z = -\frac{(\eta + c_1)}{3}\frac{c_2{}^2}{3}(\eta + c_1)^2 + c_4$$
$$\therefore \quad z = \frac{y^2}{3x} + C$$

は，与式の一般解である．（ここで，$C = c_4$．）

ちなみに，3.1１や 3.12 に解を入れてみると，与式を満たしていることが分かる．

4. 応用

応用

演習問題　第 4 章

4.1 式 4.1.1 のロートの問題で，ロートの出水口の面積が 5 倍になった場合，ロート内の水がなくなるまでの時間を求めよ．

4.2 光の速度がそれぞれ V_{I}，V_{II}（$V_{\mathrm{I}} > V_{\mathrm{II}}$）である水平に無限広がる上下二層 L_{I}，L_{II} があって，それらの境界面 Ω に垂直な断面 Ψ を考え，その交線方向を x 軸とし，L_{I} 側を y 軸の正方向とするとき，レーザー光原が L_{I} 内の点 $\mathrm{P}(-x_P, y_P)$にあって（$x_P > 0, y_P > 0$），L_{II} 内にある点 $\mathrm{Q}(x_P, -y_P)$ にうまく照射するためには x 軸上のどの点に向けて照射すればよいか．ただし，点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ は同じ断面 Ψ の中にあり，求める点を $\mathrm{R}(x, 0)$として求めよ．

4.3　$u = e^{-t} \sin x$ や $u = e^{-t} \cos x$ は熱方程式の解であることを示せ．

4.4　地上から垂直に発射されたロケットが地球から脱出する最小の初速度を求めよ．ただし，他の星や山からの万有引力や空気抵抗は無視する．

（ヒント：地球の半径を R とするとき，地球中心から半径方向で r の距離に位置する物体の加速 $\alpha(r)$は，$\alpha(r) = -g R^2 / r^2$ である．）

4.5　半径 r，密度 ρ の球がある．球の中心を原点として，全質量 M を求めよ．

（ヒント：極座標を用いる．$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} (P) \rho r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\phi$ の式中の P を考える）

4.6　式 4.4.4-20 を変形し，式 4.4.4-21 を導出せよ．

4.7　$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \mathit{\Phi}$，$\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \mathit{\Theta}$ を用いて，式 4.4.4-23 および式 4.4.4-24 を導出せよ．

4.8　式 4.5.4-6 を証明せよ．

4.9　$u(x,t) = \phi(x+ct) + \varphi(x-ct)$ が波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の解であることを示せ．

このu$u(x,t)$はダランベールの解として知られている．

4.10　$u = (x, y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$のように極座標に変換する場合，
$\partial u/\partial x$，$\partial u/\partial y$，$\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$ を極座標で表せ．

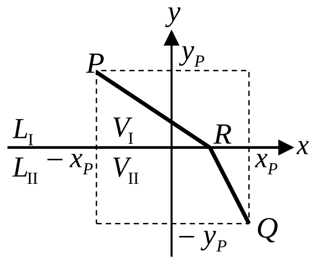
4.11　$\exp\left(\int \dfrac{dx}{x}\right) = x$ であることを示せ

4.12　式 4.6.3-13 から式 4.6.3-20 で表されるフーリエ変換の特性を証明せよ．

第 4 章　演習問題解答

4.1 出水口の面積は本書 p.173 で，S としているので，問題での 出水口の面積を S_5 とすると，S_5=5S=0.5 であるから，式 4.1.1-10 により，ロート内の水がなくなるまでの時間は，10 (9.96) 秒である．

4.2 略　（本書ｐ175 に従って解く．状況を図で描くと，右のようになる．ここで，点 R は点 P で光が発光され点 Q に最小時間で到達するとき，屈折点である $R(x, 0)$ 点 R とするとき，この場合，



$$\hat{x} = \min_{x\in\Re} \frac{\overline{PR}}{V_{\mathrm{I}}} + \frac{\overline{RQ}}{V_{\mathrm{II}}} \quad \text{subject to } x \le |x_P|$$

である $\hat{x}$ を求める問題である．ここで $x \in \Re$ は x が実数であって，$x \le |x_P|$ と言う制限をつけて，光の伝播時間を最小にする x が $\hat{x}$ である．）

4.3 式 4.4.3-8 $\dfrac{\partial}{\partial t}T(\mathbf{x},t) = \dfrac{\kappa}{\rho c_T}\nabla^2 T(\mathbf{x},t)$

が熱方程式あるいは熱拡散方程式である．問題は，ベクトル $\mathbf{x}$ に対するのではなく x 方向のみ議論するので，

$$(1)\ \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t}\sin x\right) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{-t}\sin x\right),\ (2)\ \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t}\cos x\right) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{-t}\cos x\right)$$

を示せばよい．まず（1）の左辺を U_1，右辺を U_2 とする．

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t}\sin x\right) = -e^{-t}\sin x = -U_1$$

$$U_2 = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{-t}\sin x\right) = c^2 e^{-t}\frac{\partial}{\partial x}(\cos x) = -c^2 e^{-t}\sin x = -U_2$$

なので題意は証明された．同様に（2）も証明できる．

4.4　秒速 $11.18\,\mathrm{km}\,(\approx 11.2\,\mathrm{km})$．（軌道に乗せる速度は，秒速 7.907 km）
（万有引力を考えると，…

G:万有引力定数　6.7× 10^{-11} ($m^3/s^2\times kg$)，地球の質量 M=6× 10^{24} (kg)，地球の半径 R=6400× 10^3(m)　を用いる．ヒントから,$g = -GM/r^2$ であり，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{R} \ge 0$$

であればロケットが戻ってこない．したがって，

$$v_0 \ge \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2\times 6.7\times 10^{-11}(m^3/s^2/kg)\times 6\times 10^{24}(kg)}{6400\times 10^3(m)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\times 6.7\times 10^{-11}\times 6\times 10^{24}}{64\times 10^5}}(m/s) = \sqrt{\frac{2\times 6.7\times 6}{64}}10^4(m/s)$$

$$= 1.1208\times 10^4(m/s) = 11.2(km/s)$$

ちなみに，11.2（km/s）は第二宇宙速度と呼ばれる．第二と言うくらいだから，第一宇宙速度があるはず．第一宇宙速度は，7.9（km/s）は，地面（海面）スレスレの高度で地球を周り続ける（地上に落下しない）ために必要な初速度で，計算することができる．

4.5　簡単には，

$$M=\rho V=\rho\times\frac{4\pi R^3}{3}$$

とすれば良い話だが，題意の式で，$a\to R$ として，

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}(P)\rho r^2 dr\sin\theta d\theta d\phi$$

の式を用いるとき，P が定数として積分してみると，

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}(P)\rho r^2 dr\sin\theta d\theta d\phi=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{R}P\rho r^2dr\right)\sin\theta d\theta\right)d\phi$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(P\rho\int_0^{R}r^2dr\right)\sin\theta d\theta\right)d\phi=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(P\rho\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R\right)\sin\theta d\theta\right)d\phi$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\left(\rho\frac{PR^3}{3}\right)\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\right)d\phi=\left(\rho\frac{2PR^3}{3}\right)\int_0^{2\pi}d\phi=\left(\rho\frac{2PR^3}{3}\right)\times 2\pi=P\times\rho\frac{4\pi R^3}{3}$$

となるので，実は，P=1 でよかった．

4.6 略（ヒント：　定義にしたがって計算）

4.7 略（ヒント：　定義にしたがって計算）

4.8 略（ヒント：　定義にしたがって計算）

4.9

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi(x+ct)+\varphi(x-ct)\right)=c^2\left\{\phi''(x+ct)+\varphi''(x-ct)\right\}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x+ct)+\varphi(x-ct)\right)=\phi''(x+ct)+\varphi''(x-ct)$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

4.10 $u(x,y)=u(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とは，$x=r\cos\theta$ ，$y=r\sin\theta$ ，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ ということで

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\quad ,\quad u_y=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

と表すとき，

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{yx^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

となるので，

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

と求まる．

次に

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

とすると，

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)u$$

$$u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)u$$

となるので，上記２式を用いると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)u$$

4.11

$$p = \exp\left(\int\frac{dx}{x}\right) \Rightarrow \ln p = \int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln p = \ln x \Rightarrow p = x \quad \therefore \quad \exp\left(\int\frac{dx}{x}\right) = x$$

この場合，不定積分に積分定数が内在しているので，あえて積分定数を書く必要はない

4.12

1）線形性

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\}e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\{a_1 f_1(t)\}e^{-i\omega t}dt+\int_{-\infty}^{\infty}\{a_2 f_2(t)\}e^{-i\omega t}dt$$

$$=a_1\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-i\omega t}dt+a_2\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-i\omega t}dt=a_1F_1(\omega)+a_2F_2(\omega)$$

$$\therefore\quad a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\Leftrightarrow a_1F_1(\omega)+a_2F_2(\omega)$$

2）対称性

本書の式 4.6.3-7 により，$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$　ここで，$t\to -t'$ とすれば，

$$f(-t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega(-t')}d\omega$$

さらに，$t'\to\omega$，$\omega\to t$とすると，

$$f(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}F(t)\quad\therefore\quad 2\pi f(-\omega)\Leftrightarrow F(t)$$

3）時間伸縮性

$a>0,\ at=x$ とすれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(at)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega\frac{x}{a}}d\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\frac{\omega}{a}x}dx=\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$a<0$　の場合には変数変換したときに積分範囲の正負が反転するので，$a=-p$ として計算すると分かるように，最終的に，次式となる：

$$f(at)\Leftrightarrow\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

4）時間推移性

$$f(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega(t-t_0)}d\omega=e^{-i\omega t_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$\therefore\quad f(t-t_0)\Leftrightarrow e^{-i\omega t_0}F(\omega)$$

5）周波数推移性

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}e^{i\omega_0 t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt=F(\omega-\omega_0)$$

$$\therefore\quad f(t)e^{i\omega_0 t}\Leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$$

6）時間微分

$$\frac{d}{dt}f(t)=\frac{i\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega\leftrightarrow f'(t)\Leftrightarrow i\omega F(\omega)$$

$$\therefore\quad\frac{d^n}{dt^n}f(t)=\frac{(i\omega)^n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega\leftrightarrow f^{(n)}(t)\Leftrightarrow(i\omega)^nF(\omega)$$

7）周波数微分

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=(-it)\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \Leftrightarrow F(\omega)$$

$$\therefore \quad \frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)=(-it)^n\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \leftrightarrow \frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)\Leftrightarrow(-it)^n f(t)$$

8）共役性　共役を＊で表すと,

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \leftrightarrow F^*(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f^*(t)e^{i\omega t}dt \leftrightarrow F^*(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f^*(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$\therefore \quad f^*(t)\Leftrightarrow F^*(-\omega)$$

5. 数値解析法

数値解析法

演習問題　第5章

5.1　オイラー・コーシー法により，以下の微分方程式の近似解を$n=10$まで求めよ．また，微分方程式を解析的に解いて，近似値と関数値との比較表を作成せよ．

(1)　$y' = y$，$y(0)=1$，$h=0.1$　である微分方程式

(2)　$y' = x+y$，$y(0)=1$，$h=0.2$　である微分方程式

(3)　$y' = 1+y^2$，$y(0)=1$，$h=0.1$　である微分方程式

5.2　ニュートン法により，式 5.1-4：，の実根を，式 5.1-5：$f'(x)=3x^2+1$，を用いて，$n=5$まで計算し，実根の近似値を求めよ．

5.3　ルンゲ・クッタ法により，$y'=1+y^2$，$y(0)=0$である微分方程式を$h=0.1$として，解析的に解いて，近似値と関数値との比較表を作成せよ．

5.4　FEM と BEM の原理を調べ，その違いを明確にせよ．

5.5　カルマン・フィルターの原理を調べ，事例を考えよ．

第 5 章　演習問題解答

5.1　略（ヒント：　定義にしたがって計算）

5.2　略（ヒント：　定義にしたがって計算）

5.3　略（ヒント：　定義にしたがって計算）

5.4 （解答例：FEM（Finite Element Method）は有限要素法と呼ばれ，偏微分方程式 （PDE）の定義域の近似解を求めるときに使用する数値的解法で，節点と要素を用いて，時間経過とともに変化する複雑な領域の偏微分方程式を解くのに非常に有効である．有限要素解析 FEA（Finite Element Analysis）は同じ方法でである．FEM では，解を近似的に表す基底関数を作ることに時間を要する．一方，BEM（Boundary Element Method）は，境界要素法と呼ばれ，有限要素法と同様に節点と要素を用いるが，線形偏微分方程式を定式化した積分方程式を解く数値的解法で，その名のとおり，対象領域に関して，偏微分方程式によって定義された領域のすべての値を求めるのではなく，与えられた境界条件を用いて境界値を積分方程式で近似することに用いられる．このように，FEM と BEM は，同様に，接点と要素を用いるが，FEM では内部構造をも解析するので BEM より時間がかかり，BEM では境界のみを解析するので FEM より時間がかからない．）

5.5 （解答例：カルマンフィルタ(Kalman filter）は，複数の不確実な情報が含まれると考えられる観測値から，時間変化を伴う動的システムのより正確な情報を推定することを目的を推定あるいは制御するための，無限インパルス応答フィルタの一種である．すなわち，カルマンフィルタは，システム（系）の現在の状態観測値と 1 ステップ前の状態推定値のみから（モデルが制御入力を受ける場合には，現在の入力値も用いて），現在の状態推定値（フィルタ後の推定値）と 1 ステップ先の状態推定値（1 段推定値）を求める反復推定型フィルタである．例えば，ローパスフィルタなどの多くのフィルタが周波数領域で設計され，時間領域へ変換されて実演される中で，カルマンフィルタは時間領域でのみ設計されたフィルタで，その意味で特異な存在である．カルマンフィルタは基本的に線形フィルタであり，入力値の全ても含めてを用いた線形結合の形で表現される．反復推定との対応関係は 1 ステップ前の状態推定値が 1 ステップ前までの全ての観測値（入力値も含め）の情報を線形結合の形で保有しているという事実により与えられる．言い換えると，カルマンフィルターは，時間ステップをひとつ進めるために推定と更新の二つの手続きを行う．予測の手続きでは，前の時刻の推定状態から，今の時刻の推定状態を計算する．更新では，今の時刻の観測を用いて，推定値を補正してより正確な状態を推定する．）

謝辞　いろいろな面で，北海道大学古川准教授にご指導いただきました．ここで感謝のの意を表します．

読むだけでわかる数学再入門　微分積分編
演習問題解答集

著者
今井　博

2020 年 11 月