第 1 章

基礎方程式

1.1　ナビエ・ストークス方程式

河川の流れは，非圧縮性の流れとみなせる．そこで，支配方程式は質量の保存を表す連続の式と運動量の保存を表す運動方程式になる．以下に具体的にこれらの方程式を導いてみよう．

1.1.1　連続の式

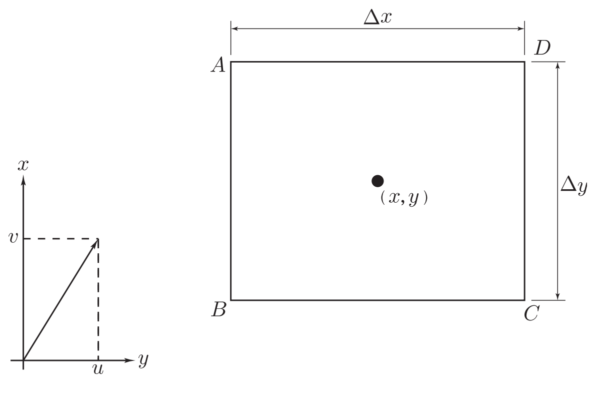

図 1.1　微小領域

簡単のために 2 次元で説明する．図 1.1 に示すように流れの領域内に微小な長方形をとり，この長方形内で流体の**質量保存**を考える．流体の密度を ρ，流速の x 方向成分を u，y 方向成分を v とする．以下，領域内では流体は湧き出したり，吸込まれたりすることはな

く，流体の出入りは領域の境界をとおして行われるものとする．図の長方形 (3 次元的に考えるならば z 方向の長さは 1 とする) の 1 辺 AB をとおして Δt 間に長方形内に流入する流体の質量は，この時間内に流体が x 方向に $u(x - \Delta x/2, y, t)\Delta t$ 移動するため，

$$\begin{aligned}
\text{質量} &= \text{密度} \times \text{体積} \\
&= \rho(x - \Delta x/2, y, t)u(x - \Delta x/2, y, t)\Delta t\Delta y \\
&= \left(\rho(x, y, t) - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \cdots\right)\left(u(x, y, t) - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \cdots\right)\Delta t\Delta y \\
&= \Delta y\Delta t\left(\rho(x, y, t)u(x, y, t) - \frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial x}u\Delta x - \frac{1}{2}\rho\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \text{高次の項}\right) \\
&\fallingdotseq \Delta y\Delta t\left(\rho u - \frac{1}{2}\frac{\partial \rho u}{\partial x}\Delta x\right)
\end{aligned}$$

となる．ただし，長方形の中心の座標を (x, y)，1 辺の長さを Δx，Δy としており，また式の変形にはテイラー展開を用いた上で最終式では高次の微小量は省略している．同様に CD をとおして Δt 間に流出する質量は

$$\rho(x + \Delta x/2, y, t)u(x + \Delta x/2, y, t)\Delta t\Delta y \fallingdotseq \Delta y\Delta t\left(\rho u + \frac{1}{2}\frac{\partial \rho u}{\partial x}\Delta x\right)$$

である．したがって，Δt 間の x 方向の正味の流入量は AB 間の流入量から CD 間の流出量を差し引いて

$$-\Delta x\Delta y\Delta t\frac{\partial \rho u}{\partial x}$$

となる．同様に考えれば，Δt 間の y 方向の正味の流入量は

$$-\Delta x\Delta y\Delta t\frac{\partial \rho v}{\partial y}$$

である．そして，これらを加えたものが，長方形領域における Δt 間の質量の変化

$$\begin{aligned}
\text{質量の変化} &= \text{体積} \times \text{密度の変化} \\
&= \Delta x\Delta y(\rho(x, y, t + \Delta t) - \rho(x, y, t)) \\
&\fallingdotseq \Delta x\Delta y\Delta t\frac{\partial \rho}{\partial t}
\end{aligned}$$

と等しくなる．したがって，$\Delta x, \Delta y, \Delta t$ が 0 の極限で質量保存を表す方程式として

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

が得られる．この方程式を**連続の式**という．河川の流れでは流体の密度は一定であると考えられるため，式 (1.1) は簡略化されて

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.2}$$

となる．

なお，3 次元の場合も，長方形を直方体にとって同様の議論を行えば

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \tag{1.3}$$

となり，密度が一定ならば

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.4}$$

となる．ただし，w は z 方向の速度成分である．

＜ラグランジュ微分＞

流体は流れるため，流れとともに物理量を輸送する．ある物理量 $f(x, y, z, t)$ が流されて Δt 間にある位置から別の位置に移動したとする．新しい位置での物理量からもとの位置の物理量を引いて，時間間隔 Δt で割ると Δt 間に流体とともに移動した物理量の平均的な変化率になるが，Δt が 0 の極限におけるこの変化率のことを**ラグランジュ微分**とよび，記号 Df/Dt で表す．これは t に関するふつうの偏微分 (**オイラー微分**) とは異なっている．なぜなら，オイラー微分では場所は固定されているからである．

ある点 (x, y, z) にあった物理量はその点における流速を (u, v, w) としたとき，微小時間 Δt 後には

$$(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t)$$

に移動している．したがって，f のラグランジュ微分は定義から

$$\frac{Df}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - f(x, y, z, t)}{\Delta t}$$

となる．分子は，第 1 項をテイラー展開すれば

$$f(x, y, z, t) + u\Delta t \frac{\partial f}{\partial x} + v\Delta t \frac{\partial f}{\partial y} + w\Delta t \frac{\partial f}{\partial z} + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + O((\Delta t)^2) - f(x, y, z, t)$$

となるため，これを定義式に代入して極限をとれば

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1.5}$$

となる．これがラグランジュ微分とオイラー微分の関係である．

連続の式 (1.3) を展開すれば，ラグランジュ微分を用いて

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

と書ける．一方，**非圧縮性流体の定義**は

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \tag{1.6}$$

(言葉で表現すれば密度が流体の運動によって変化しないような流体) である．そこで，非圧縮性流体に対する連続の式 (1.4) が導かれる．この定義から，密度が時間・場所によらずに一定であれば非圧縮性であるが，非圧縮性流体であっても必ずしも密度が一定である必要はない．

1.1.2　運動方程式

連続の式を導いたのと同様に，領域内に微小領域 (長方形や直方体) をとり，そこで**運動量の保存**を考えると**運動方程式**が導かれる．ここでも簡単のため，2 次元性を仮定し，微小領域として図 1.1 に示した長方形をとる．この領域内の Δt 間の運動量の変化が力積に等しい．

領域内の運動量の変化は，時間的な変化以外に流体が運動量を運ぶことによってももたらされる．運動量はベクトルであるから，ここでは x 方向の運動量を考えるが y 方向も同様である．図 1.1 の辺 AB を Δt 間に通過して領域内に流入する x 方向の運動量は

$$\begin{aligned}\text{質量} \times \text{速度} &= \text{密度} \times \text{体積} \times \text{速度} \\ &= \rho(x - \Delta x/2, y, t) u(x - \Delta x/2, y, t) \Delta t \Delta y u\,(x - \Delta x/2, y, t)\end{aligned}$$

であり，辺 CD を同じ時間に通過して流出する運動量は

$$\rho(x + \Delta x/2, y, t) u(x + \Delta x/2, y, t) \Delta t \Delta y u\,(x + \Delta x/2, y, t)$$

である．さらに y 方向の運動によっても x 方向の運動量が運ばれる．すなわち，辺 BC を Δt 間に通過する x 方向の運動量は

$$\begin{aligned}\text{質量} \times \text{速度} &= \text{密度} \times \text{体積} \times \text{速度} \\ &= \rho(x, y - \Delta y/2, t) v(x, y - \Delta y/2, t) \Delta t \Delta x u\,(x, y - \Delta y/2, t)\end{aligned}$$

で，辺 AD を通過する運動量は

$$\rho(x, y + \Delta y/2, t)v(x, y + \Delta y/2, t)\Delta t \Delta x u\,(x, y + \Delta y/2, t)$$

である．したがって，これらの式をテイラー展開して差をとることにより流体が運動量を運ぶことによって長方形内に流入する正味の運動量は

$$-\Delta x \Delta y \Delta t \left(\frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} \right) + (\text{高次の微小量}) \tag{1.7}$$

であることがわかる．これと，x 方向の力積 $X\Delta t$（X は x 方向の力）の和がこの領域での Δt 間の x 方向の運動量の変化

$$\begin{aligned}&\Delta x \Delta y \rho(x, y, t + \Delta t)u(x, y, t + \Delta t) - \Delta x \Delta y \rho(x, y, t)u(x, y, t)\\&= \Delta x \Delta y \Delta t \frac{\partial \rho u}{\partial t} + (\text{高次の微小量})\end{aligned} \tag{1.8}$$

と等しくなる．

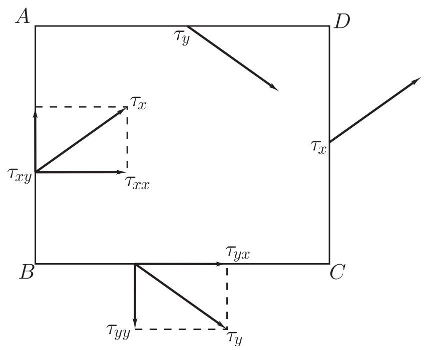

図 1.2　応力

次に領域に働く力 $\boldsymbol{F}$ を考える．この力には，**応力** (圧力および粘性による内部摩擦力) など面 (辺) を通して働く**面積力**と，重力など体積全体に働く**体積力**がある．x 方向の面積力は長方形の各辺を通して働く．そして図 1.2 に示すように AB 面と CD 面に働く応力を τ_x，またその x 成分を τ_{xx} と記す．さらに BC 面と AD 面に働く応力を τ_y，またその x 成分を τ_{yx} と記す．応力は単位面積 (2 次元の場合には単位長さ) あたりの力である

から，この長方形部分に働く正味の力は x 方向に

$$
\begin{aligned}
&\Delta y\left\{\tau_{xx}(x+\Delta x/2,y,t)-\tau_{xx}(x-\Delta x/2,y,t)\right\}\\
&\qquad+\Delta x\left\{\tau_{yx}(x,y+\Delta y/2,t)-\tau_{yx}(x,y-\Delta y/2,t)\right\}\\
&\qquad\qquad=\Delta x\Delta y\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\right)+(\text{高次の項})
\end{aligned}
$$

となる．

体積力は流体の運動とは無関係に (いいかえれば既知のものとして) 与えられることが多い．いま，単位質量あたりの x 方向の体積力を F_x とすれば長方形領域に働く体積力は x 方向に $\rho\Delta x\Delta yF_x$ となる．

以上のことをまとめれば，長方形領域に働く x 方向の力積は

$$
\Delta x\Delta y\Delta t\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\rho F_x\right)+(\text{高次の項}) \tag{1.9}
$$

となる．式 (1.7)，(1.8)，(1.9) から x 方向の運動方程式として

$$
\frac{\partial\rho u}{\partial t}+\frac{\partial\rho u^2}{\partial x}+\frac{\partial\rho uv}{\partial y}=\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\rho F_x \tag{1.10}
$$

が得られる．この式の左辺を展開して，連続の式 (1.2) を用いれば

$$
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\rho F_x\right) \tag{1.11}
$$

となる．同様に y 方向の運動量の保存を考えれば

$$
\frac{\partial\rho v}{\partial t}+\frac{\partial\rho uv}{\partial x}+\frac{\partial\rho v^2}{\partial y}=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\rho F_y \tag{1.12}
$$

が得られる．ただし，前述のとおり τ_{xy} は辺 AB，CD に働く応力 τ_x の y 成分，τ_{yy} は辺 BC，AD に働く応力 τ_y の y 成分である．この式も連続の式を用いて

$$
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\rho F_y\right) \tag{1.13}
$$

と変形できる．

これらの方程式は各応力が未知なのでそのままでは解けない．しかし，実際には**ニュー**

トン流体（水や空気など）に対して，応力は圧力と速度を用いて

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ \tau_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned} \tag{1.14}$$

と表わせることが知られている．ここで，μ は流体の**粘性率**である．詳細は流体力学の教科書[*1]を参照されたい．この関係および連続の式を用いれば，式 (1.10)，(1.12) は

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \rho F_x \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \rho F_y \tag{1.16}$$

となり，また式 (1.11)，(1.13) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F_x \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + F_y \tag{1.18}$$

となる．ただし，粘性率 μ は定数とした．また $\nu = \mu/\rho$ である．これが非圧縮性流体の運動量保存を表す運動方程式である．連続の式と運動方程式をまとめて (非圧縮性の) **ナビエ・ストークス方程式**という．未知数は速度 (2 次元の場合には 2 成分) と圧力であり，方程式の数と一致している．

3 次元の場合にも同様の考察から運動方程式は

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \rho F_x \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \rho F_y \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho uw}{\partial x} + \frac{\partial \rho vw}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \rho F_z \tag{1.21}$$

[*1] たとえば，今井 功：「流体力学（前編），裳華房（1973），巽 友正：「流体力学」，培風館（1982）など

または

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F_x \qquad (1.22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+F_y \qquad (1.23)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+F_z \qquad (1.24)$$

となる．

1.1.3　境界条件

偏微分方程式の一般解は任意関数を含むため，いろいろな関数が解になる可能性がある．それをひとつに決めるために**境界条件**が課される．そして，実用上で重要なのは，一般解ではなく，境界条件を満足するただひとつの解である．境界条件の課し方によって解はいくらでも変わるため，現実の状況と全く異なった解が得られたり，また不適切な境界条件では解をもたない場合もある．したがって，流体の方程式を解く場合には適切な境界条件を課すことが非常に重要になる．

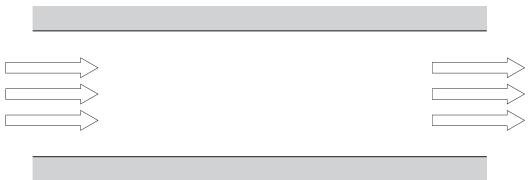

図 1.3　2 次元水路

運動方程式は空間微分および時間微分を含むため，それぞれに対して境界条件が必要になる．ただし時間に関しては 1 階であるので，ある指定された時間 (たとえば $t=0$) における未知関数の値を与えるのがふつうである．この場合の境界条件を特に**初期条件**という．一方，空間に関しては考えている領域を取り囲む境界で関数の値または導関数の値を与える．

具体的に考えた方がわかりやすいため，図 1.3 に示すような 2 次元的な水路を考える．流体は左の境界から流入して，右の境界から流出する．また上下の境界は固体壁とする．このような水路内の流れを解析する場合の境界条件を検討してみよう．

固体 (ただし流体はしみ込まないとする) の表面すなわち**壁面境界**において，粘性をもっ

た流体では流体と固体の間に相対速度を生じないということが実験から知られており，**粘着条件**とよばれている．すなわち，$\boldsymbol{v}_B$ を壁面の速度としたとき

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B \tag{1.25}$$

が成り立つ．したがって，壁面が静止していれば $\boldsymbol{v}_B = 0$ なので，上式は 2 次元の場合

$$u = 0, \quad v = 0 \tag{1.26}$$

を意味する．なお，粘性を考えない流体 (**非粘性流体**) では，運動方程式から粘性項を落とすため，微分方程式は 1 階になる (**オイラー方程式**とよばれる)．このとき，粘着条件を課すと境界条件の数が過剰になり解をもたなくなる．このような場合には

$$v_n = 0 \tag{1.27}$$

という条件が課される．ここで，v_n は壁面に垂直な方向の速度成分である．なぜなら，もし v_n が 0 でなければ，流体は壁にしみ込んだり，壁から離れて真空部分をつくることになり不合理であるからである．非粘性流体では一般に固体壁に沿った方向の速度は 0 にならない．このような条件をすべり条件という．

流入境界では，通常は境界に沿って流速分布を与えることになる．流量だけが与えられる場合もあるが，実際は流速分布を与えないと解は決まらない．そこで，そのような場合には何らかの形で流量から流速を推定することになる．たとえば，一様流速を仮定する場合には，単位時間当たりの質量流量を Q とすれば

$$u = \frac{Q}{\rho l}$$

となる．ただし，ρ は流体の密度，l は水路の幅で，流入境界が $x =$ 一定の面であるとしている．

流出境界での境界条件も原理的には流入境界と同様に流速分布を与えないと解が一通りに決まらない．逆にいえば流出境界での流速分布を変化させると内部の解がそれに応じて変化することになる．しかし，現実には流速分布を与えることができないので，流入境界と同様に流量から何らかの形で流速分布を推定したり，あるいは内部の流速から外挿して決める．外挿する場合には，もっとも単純に流速勾配が 0，すなわち

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} = 0$$

という条件を課すことが多い．

ナビエ・ストークス方程式には圧力項もあるため，問題の種類や解法によっては，解く段階で圧力に関する境界条件も必要になる．ただし，速度に応じて圧力が決まるため，ひとつの境界で圧力を速度と無関係に与えると境界条件が過剰になる．そこで，流速が与えられた場合には圧力は速度の条件を運動方程式に代入して間接的に決める．一方，すぐ後に述べる自由境界問題では，圧力の条件が直接指定されるため，速度に関しては外挿して決めることになる．

固体壁でない境界もある．河川の流れでふつうに現れるこのような境界は水面である．水面の形状は内部の流れによって変化する．いいかえれば，水面形状はあらかじめ指定することはできず，方程式を解きながら決める必要がある．このような境界を**自由境界**または**自由表面**という．自由表面では表面内外で応力が連続的につながるという条件が課される．もし不連続であればその場所で無限の加速度が生じて不合理であるからである．ただし，水面では水は密度が非常に異なる空気と接しており，しかも興味が水の運動にあるため，ふつう空気側は真空として応力は 0 と仮定する．したがって，境界条件は簡単に

$$p = p_0$$

とすることが多い．ここで p_0 は大気圧である．この場合，速度は前述のとおり外挿して決める．

自由表面の形状は「自由表面上にある流体は常に自由表面上にある」という条件から決まる．この条件は，自由表面の形が

$$F(x, y, t) = 0$$

で与えられる場合には

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \tag{1.28}$$

となる．