

第 1 章

マトリックス法

1.1 1次元問題

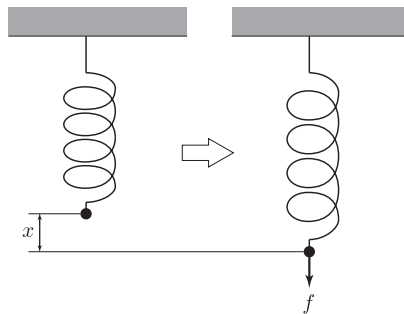


図 1.1 バネと伸び

図 1.1 に示すようにバネの一端を固定して，もう一端を力 f で引張ってみよう．力が大きければ大きいほどバネは伸びるが，よく知られているように加える力とバネの伸びとは比例する．この関係を式で書けば次のようになる．すなわち伸びを x とすれば

$$f = kx \quad (1.1)$$

である．これをフックの法則とよぶ． k は比例定数でバネ固有の値をもち，バネ定数とよばれる．フックの法則から力がわかれば伸びが計算できる．

次に図 1.2 に示すように n 個 (図では 4 個) のバネが直列につながれている場合を考える．図において i 番目のバネと $i+1$ 番目のバネに注目してみよう．

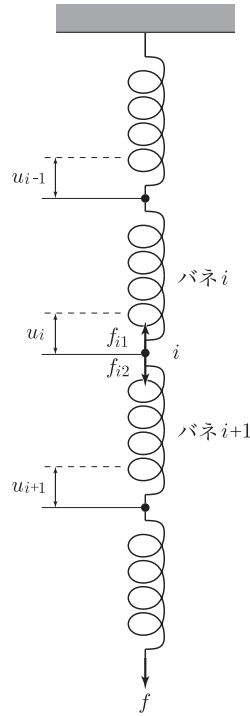


図 1.2 複数のバネと伸び

点 i にかかる力を考えると

- i 番目のバネによる力
- $i + 1$ 番目のバネによる力
- 点 i における外力

がある。

点 i の変位 (現在の点 i の座標からバネが伸びていない状態での点 i の座標を引いた値) を u_i とすれば, i 番目のバネの伸びは図 1.2 に示すように $u_i - u_{i-1}$ で与えられる。したがって, フックの法則から i 番目のバネによる力 f_{i1} は

$$-k_i(u_i - u_{i-1})$$

となる。ただし k_i はバネ i 番目のバネ定数であり, 全体に負の符号がついているのは力が引き戻される向きに働くからである。同様にして, バネ $i + 1$ によって点 i に働く力 f_{i2}

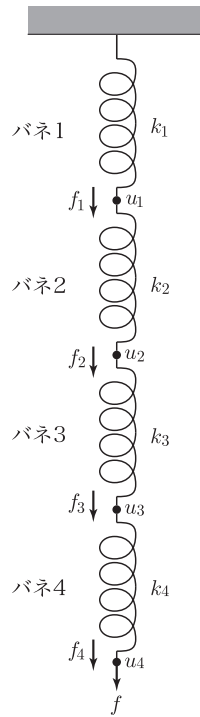


図 1.3

は

$$k_{i+1}(u_{i+1} - u_i)$$

である。点 i が動かない状態では、そこで力の釣り合いが取れていることを意味するから、これら 2 つの力と点 i における外力 f_i (下向きを正とする) を足したものが 0 でなければならない。すなわち

$$k_{i+1}(u_{i+1} - u_i) - k_i(u_i - u_{i-1}) + f_i = 0$$

または

$$-k_i u_{i-1} + (k_i + k_{i+1})u_i - k_{i+1}u_{i+1} = f_i \quad (1.2)$$

(1.2) 式を具体的に書くと、図 1.3 より

$$\begin{array}{ll}
 \text{バネ 1} & -\kappa_1 u_0 + (\kappa_1 + \kappa_2)u_1 - \kappa_2 u_2 = f_1 \\
 \text{バネ 2} & -\kappa_2 u_1 + (\kappa_2 + \kappa_3)u_2 - \kappa_3 u_3 = f_2 \\
 \text{バネ 3} & -\kappa_3 u_2 + (\kappa_3 + \kappa_4)u_3 - \kappa_4 u_4 = f_3 \\
 \text{バネ 4} & -\kappa_4 u_3 + (\kappa_4 + \kappa_5)u_4 - \kappa_5 u_5 = f_4
 \end{array}$$

ここで、 $u_0 = 0$ 、バネ 5 はないので、 $\kappa_5 = 0$

$$\begin{aligned}
 (\kappa_1 + \kappa_2)u_1 - \kappa_2 u_2 &= f_1 \\
 -\kappa_2 u_1 + (\kappa_2 + \kappa_3)u_2 - \kappa_3 u_3 &= f_2 \\
 -\kappa_3 u_2 + (\kappa_3 + \kappa_4)u_3 - \kappa_4 u_4 &= f_3 \\
 -\kappa_4 u_3 + \kappa_4 u_4 &= f_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccl}
 (\kappa_1 + \kappa_2)u_1 & -\kappa_2 u_2 & 0u_3 & 0u_4 & = f_1 \\
 -\kappa_2 u_1 & +(\kappa_2 + \kappa_3)u_2 & -\kappa_3 u_3 & 0u_4 & = f_2 \\
 0 & -\kappa_3 u_2 & +(\kappa_3 + \kappa_4)u_3 & -\kappa_4 u_4 & = f_3 \\
 0 & 0 & -\kappa_4 u_3 & +\kappa_4 u_4 & = f_4
 \end{array}$$

これをマトリックスの形にすると

$$\begin{bmatrix} \kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & \kappa_2 + \kappa_3 & -\kappa_3 & 0 \\ 0 & -\kappa_3 & \kappa_3 + \kappa_4 & -\kappa_4 \\ 0 & 0 & -\kappa_4 & \kappa_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

$$[\kappa] = \begin{bmatrix} \kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & \kappa_2 + \kappa_3 & -\kappa_3 & 0 \\ 0 & -\kappa_3 & \kappa_3 + \kappa_4 & -\kappa_4 \\ 0 & 0 & -\kappa_4 & \kappa_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

とおけば

$$[\kappa] \mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{1.3}$$

となる。(1.3) 式をバネの剛性方程式という。

各バネともにバネ定数が等しく, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = \kappa$ であるとする, このとき式 (1.3) は

$$\begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

となる.

もし各バネが軽くてそれ自身の重さが無視できれば

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0, \quad f_4 = f$$

である. ただし f はバネにつしたおもりの重さである. さて式 (1.3) は

$$\left\{ \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

と書き換えることができる. したがって, 次式の右辺の g_2, g_3 をうまく選べば 3 個の方程式

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ f_2 - g_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (g_1 = f_1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \\ f_3 - g_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_3 \\ f_4 - g_4 \end{bmatrix} \quad (g_4 = 0) \quad (1.5)$$

に分解される. 逆に上の 3 個の方程式から式 (1.3) を得るには各方程式を加え合わせればよい. ここで g_2, g_3 をどうとっても足し算をおこなえば打ち消し合って最終結果には影響を及ぼさないことに注意しよう. 式 (1.5) は, はじめの式を除いて同じ形をしている. いいかえれば行列から 0 の要素をとりのぞけば, すべて

$$\begin{bmatrix} k_i & -k_i \\ -k_i & k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{i-1} \\ f_i - g_i \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

と書ける．なお，式 (1.6) は次のように解釈できる．すなわち，第 1 行は点 $i-1$ への影響，第 2 行は点 i への影響を表し，それぞれ $k_i u_{i-1} - k_i u_i$ ， $-k_i u_{i-1} + k_i u_i$ であること，そしてそれらがそれぞれの点での力 g_{i-1} ， $f_i - g_i$ とつり合っていることを意味している．一方，はじめの式も

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_0 \\ f_1 - g_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \\ f_2 - g_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.7)$$

の和と考えることができるため式 (1.6) の形にできる．

ただし u_0 は端の点であり，この場合，固定されているので， $u_0 = 0$ である．すなわち，式 (1.7) の第 1 式は u_0 を決める方程式というより， g_0 を決める式になっており，式 (1.3) を解いて u_1 が求まれば逆に g_0 を求めることができる．

式 (1.6) にはバネ i に関する量 (すなわちバネ定数 k_i とバネの両端の変位と力) だけが現れている．式 (1.3) はバネの継目 (節点) をもとにした記述であったのに対し，式 (1.6) は各バネ (要素) に注目した記述といえる．このような記述をしても式 (1.6) に 0 要素を加えて拡大してそれらを足しあわせれば式 (1.4)，すなわち式 (1.3) が得られる．ここでは特に各バネに注目した定式化を行っても式 (1.3) が得られることを強調しておく．

1.2 2次元解析

図 1.4 に示すような構造物を考え、一部の節点に荷重を加えたとき構造物がどのように変形し、また各節点にどれだけ力が働くかを考えてみよう。ただし各節点は図 1.5 に示されているような構造になっており、部材間の角度は自由に变化できるようになっているものとする。また部材自身は長さ方向にだけ伸び縮みするものとする。このような構造物を 2 次元トラスとよんでいる。

この問題は各節点ごとに力（やモーメント）の釣り合いを考えれば解ける。しかし前節の最後に述べた個々のバネに注目した取り扱いのように、個々の部材に注目しても解くことができる。ここでは後者の取り扱いをしてみよう。

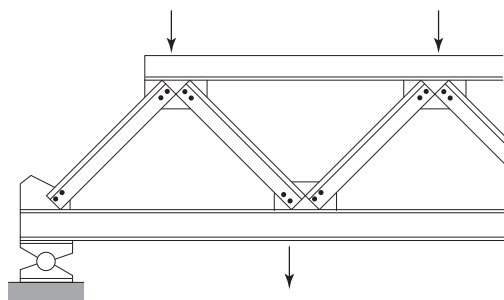


図 1.4 2次元のトラス構造の例

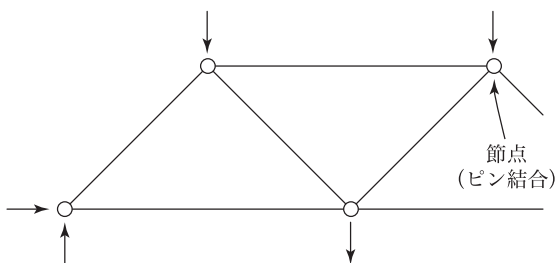


図 1.5 (ピン結合)の例

図 1.6 に示すようにひとつの部材をとりだして考える。部材の両端の節点に番号をつける。それを i, j とする。図 1.4 を見てもわかるように、2 次元トラスは 2 次元構造をもつ

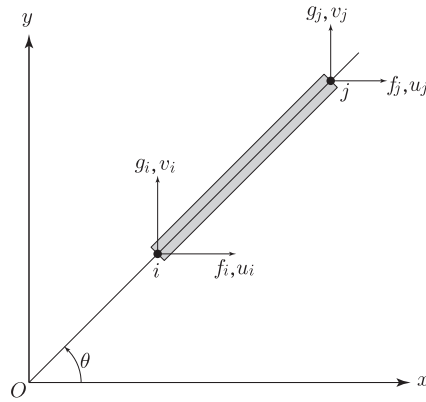


図 1.6 ひとつの部材の釣り合い

ているため、一般に i と j は続き番号ではない。点 i にかかる力 (荷重や他の部材によってかかる力などの合計) の x, y 成分をそれぞれ f_i, g_i とし、同様に点 j にかかる力の x, y 成分を f_j, g_j とする。さらに点 i の x, y 方向の変位を u_i, v_i 、点 j におけるそれらを u_j, v_j とする。

このとき点 i における x 方向の力の釣り合いは、部材が x 軸となす角を θ として

$$k_{ij} \{ (u_j - u_i) \cos \theta + (v_j - v_i) \sin \theta \} \cos \theta + f_i = 0$$

となる。ここで $\{ \quad \}$ 内は軸の伸びを表す。また k_{ij} は i, j で指定される部材のバネ定数である。 y 方向の力の釣り合いも同様に

$$k_{ij} \{ (u_j - u_i) \cos \theta + (v_j - v_i) \sin \theta \} \sin \theta + g_i = 0$$

である。さらに点 j について同じ式をつくると

$$k_{ij} \{ -(u_j - u_i) \cos \theta - (v_j - v_i) \sin \theta \} \cos \theta + f_j = 0$$

$$k_{ij} \{ -(u_j - u_i) \cos \theta - (v_j - v_i) \sin \theta \} \sin \theta + g_j = 0$$

となる。ただし力の向きが i と j では逆であることを用いた。この方程式を行列の形にまとめると次のようになる。

$$k_{ij} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \\ f_j \\ g_j \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

このようにして各部材に対する方程式が得られれば，式 (1.4) で行ったように全体系に対する方程式をつくることができる．そのためにもず，節点の数が N であれば，式 (1.8) に 0 要素を加えて $2N \times 2N$ の行列に拡大する．ここで N でなく $2N$ であるのは各点に対して x, y の 2 方向あるからである．このとき式 (1.9) に示すように行列の要素を配置する．ただし式 (1.9) に示されていない要素はすべて 0 である．この手続きを全部材に対して行って加え合わせれば全体の方程式ができる．右辺の力は，内力の和であり，節点に荷重がない場合は 0 であり，荷重がある場合にはその点の荷重と等しくとる．

$$\begin{matrix} & & 2i & & 2i+1 & & 2j & & 2j+1 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 2i & \cdots & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \cdots & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cdots & \\ 2i+1 & \cdots & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & \cdots & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & \cdots & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 2j & \cdots & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cdots & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \cdots & \\ 2j+1 & \cdots & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & \cdots & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & \cdots & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{matrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_i \\ v_i \\ \vdots \\ u_j \\ v_j \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ f_i \\ g_i \\ \vdots \\ f_j \\ g_j \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

実は，ここで得られた連立 1 次方程式はこのままでは解くことはできない．それは係数行列の行列式の値が 0 であるからである．境界条件がまだ式に考慮されていないためこのようなことがおこる．具体的には，節点のうちいくつかは固定されており，そこでの変位は 0 であるため，そのような点での変位は方程式から取り除く必要がある．例えば，節点 k と l が固定点であれば係数行列の $2k, 2k+1$ および $2l, 2l+1$ 番目の行と列を取り除き，また未知ベクトルと右辺の $2k, 2k+1, 2l, 2l+1$ 番目の要素を取り除く．このような手続きで得られた方程式が最終的な方程式となり，それを解けば必要な解が得られることになる．