

第 1 章

水の物理的性質

1.1 水の密度 (density) と単位重量 (unit weight)

水理学では工学的な目的から見た水の力学を扱う．そこでまず，必要な水の物理的諸性質を述べる．

単位体積当りの水の重さ，すなわち水の単位重量 w は重さの単位として用いられて来た．従来の工学単位では 1 気圧で 4°C の水 1 cm³ の重さを 1 グラムと定めていた．しかし重さは力の次元をもつもので，重力加速度 g に関係するから，水に固有の値としては，単位体積当りの質量，すなわち密度 ρ を考え，SI 単位では標準状態の水 1 m³ の質量を 1000 kg (1 cm³ について 1 gr) と定める． $w = \rho g$ の関係があるから，重力加速度を $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とすると

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ gr/cm}^3, \quad w = 9800 \text{ N/m}^3$$

である．従来の工学単位による重さの単位を grf (重量グラム), kgf (重量キログラム) で表わせれば次のようになる*1．

$$w = 1 \text{ grf/cm}^3 \quad \text{または} \quad 1000 \text{ kgf/m}^3$$

$$\rho = 1/980 \text{ grf} \cdot \text{s}^2/\text{cm}^4 \quad \text{または} \quad 1000/9.8 \text{ kgf} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4$$

図 1.1 は標準大気圧の下での純水の密度と温度の関係をエクセルの表で作成したものである．

*1 土木工学でよく使用される諸量の単位変換については「エクセル土木工学入門」:山海堂 等を参照.

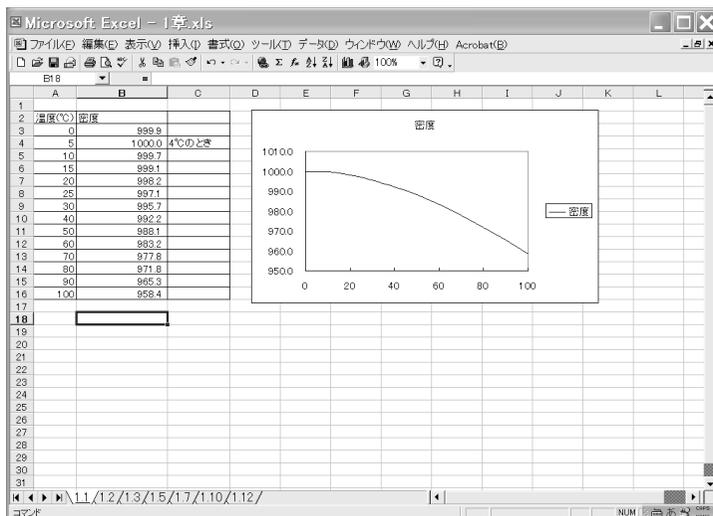


図 1.1 水の密度と水温の関係

この表から見ると，常温では温度の変化に伴う水の密度の変化は非常に小さい．例えば水温が 20°C から 30°C に上がった時の密度変化の割合は，平均して 1°C の上昇に対して 2.6×10^{-4} 程度である．したがって特に密度の違いによって起こる運動を扱う場合以外は水の密度または単位重量は一定と考えて，標準状態の時の値を用いる．

図 1.2 は水理学でも問題になるような純水以外の液体の密度をエクセルにて作成して示す．

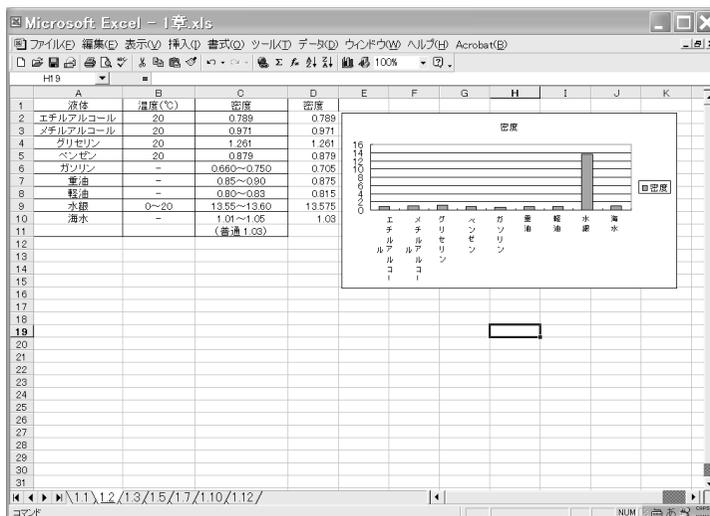


図 1.2 いろいろな液体の密度 (単位 : gr/cc)

1.2 水の圧縮性と体積弾性係数

単位面積当りの圧力，すなわち強さ p の圧力の下にある水の温度を一定に保ちながら，圧力の強さを $p + dp$ まで上げた時に，水の体積が V から $V - dV$ に減ったものとするとき，水の圧縮率 β は

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad (1.1)$$

であって， $E = 1/\beta$ を体積弾性係数という。

水・メチルアルコール・水銀などの，圧力 0 ～ 25 気圧の範囲内での β と E の値を図 1.3 にエクセルの表で示す。

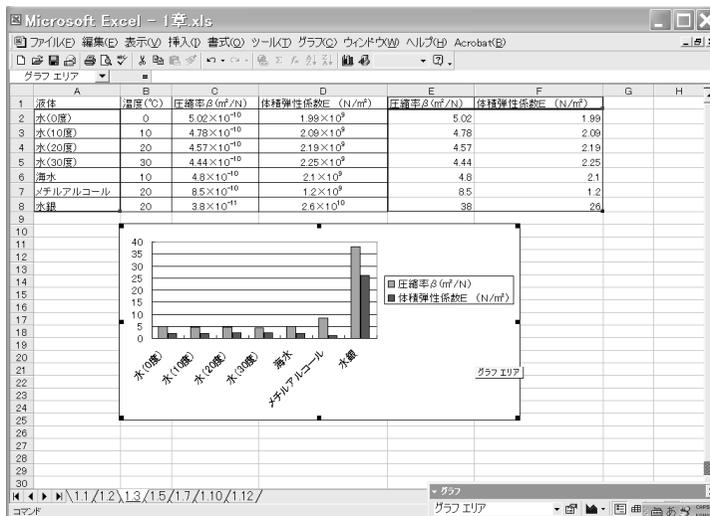


図 1.3 液体の圧縮率と体積弾性係数

このように圧力変化に対しても，水その他の液体の体積変化は非常に小さいから，水理学では水中に起こる弾性波の伝わる問題以外では， $\beta = 0$ として，体積の変化は無視される。

空気の密度は温度と圧力の影響が大きい．標準大気圧を 1013mb (ミリバール，1 バールは 10^5 N/m²) とした時に， $t^\circ\text{C}$ で圧力 H mb の乾燥した空気の密度 ρ' は次式で与えられる。

$$\rho' = \frac{1.293}{1 + 0.00367t} \times \frac{H}{1013} \left[\text{kg/m}^3 \right] \quad (1.2)$$

例えば， 20°C ，1 気圧の下で体積 V の空気に 2 気圧の圧力を掛けた時の体積または密度の変化を考えると，気体は圧力が上がると温度も上がるが，いま温度を一定に調節しているものとする，圧力と体積は逆比例の関係にあるので，圧力が 2 倍になれば体積は $1/2$ に，密度は 2 倍になる．しかし空気の熱伝導度は低いので熱の交換には時間がかかるから，このような問題では断熱変化として取り扱う．すなわち圧力 p と密度 ρ' の関係は

$$p/\rho'^k = \text{const.}$$

であって，空気では $k = 1.4$ である．そこで 1 気圧の時の密度 ρ'_1 が 2 気圧の時に ρ'_2 になったものとする

$$(\rho'_2/\rho'_1)^{1.4} = 2$$

式 (1.2) により $\rho'_1 = 1.205 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ であるから

$$\rho'_2 = 2^{0.714} \times 1.205 = 1.977 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

体積は $1.205/1.977$ 倍，すなわち $0.61V$ になる．

1.3 表面張力 (surface tension)

波立った水面のように空気に接した液体表面が曲面になっていると、表面に沿って表面張力が働く。これは気体と液体の分子引力の差に基づくものであって、この時は曲面の上と下で圧力の差 p を生じている。液体表面に、ごく薄い膜を考え、図 1.4 のようにこの膜の主曲率半径を R_1, R_2 とし、この曲率の方向に線要素 dx, dy をとると、 $dx = R_1\theta_1$ 、 $dy = R_2\theta_2$ である。単位長さ当りの表面張力の強さを T (次元は $[MT^{-2}]$) とすると、面 $dx \times dy$ に働く力のつり合い条件により次の関係が得られる。

$$dx \cdot dy \cdot p = 2T \sin \frac{\theta_1}{2} \cdot dy + 2T \sin \frac{\theta_2}{2} \cdot dx$$

$$\therefore p = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.3)$$

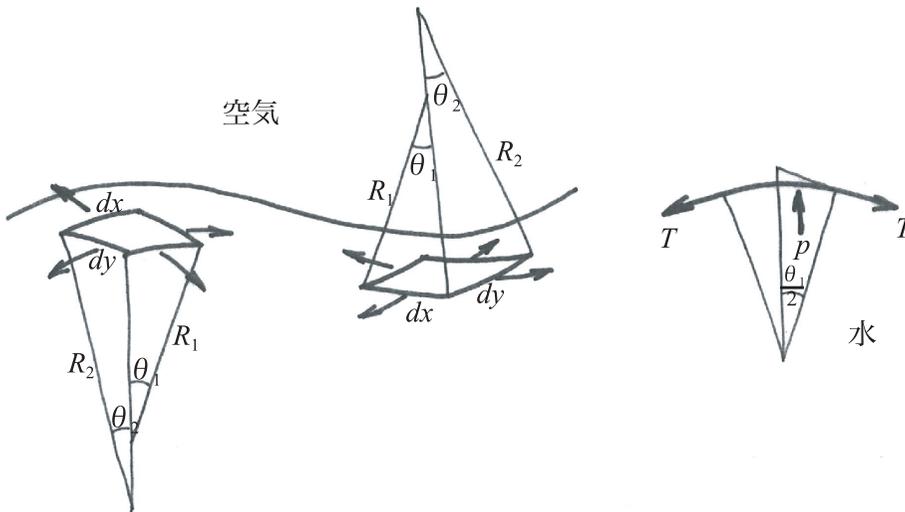


図 1.4

液面がへこんでいる時は、 R_1 と R_2 は負であって、液面の下の圧力は大気圧以下になっている。

水の表面張力をエクセルにて図 1.5 に示す.

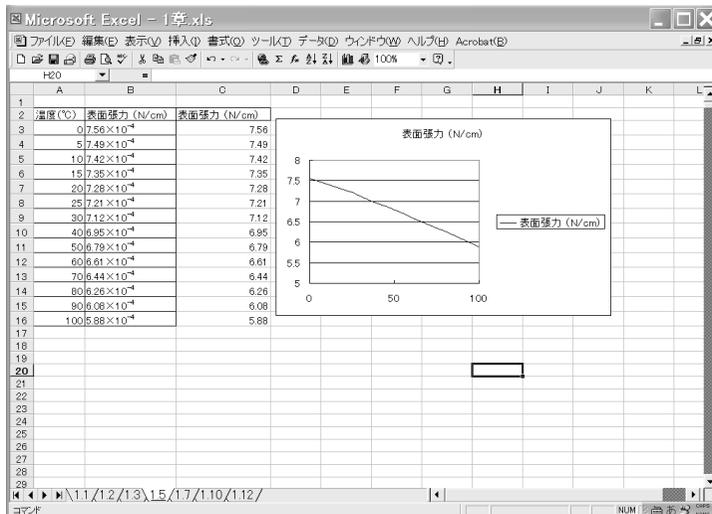


図 1.5 水の表面張力と水温の関係

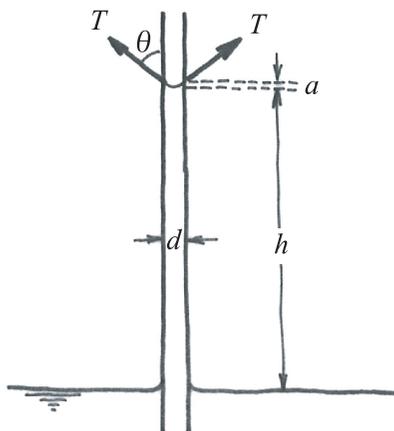


図 1.6

水面が固体表面と接する所では，水面と固体表面とのなす角，すなわち接触角は，常温では $8 \sim 9^\circ$ である．水上に直径 d の細い管を立てて，その内面をぬらすと，水は管の中をある高さまで上がる．これを毛管現象 (capillary phenomenon) という．毛管現象によって水の上がる高さを h とすると，この水に働く外力は，重力と表面の周辺に働く表面張力だけであって，後に述べるように摩擦力は働いていない．したがって力のつり合い条

件は，接触角を θ とすると，

$$\rho g \times \frac{\pi d^2}{4} h = \pi d T \cos \theta$$

これから毛管高 (capillary height) h が次のように求められる．

$$h = \frac{4T \cos \theta}{\rho g d} = \frac{4T \cos \theta}{w d} \quad (1.4)$$

w は水の単位重量である．水理学で表面張力の影響が考えられる問題はきわめて少なく，ごく小さい水面の波，土粒子の間の地下水の表面などである．常温の水が空気に接している場合の表面張力の強さは約 $T : 0.073$ [N/m] である．

いま，内径 1 mm のガラス管を水上に立てた時の毛管高を水温 $0^\circ \sim 50^\circ\text{C}$ まで変化させてエクセルにて計算して以下に示す．ただし，水とガラス管の接触角を 8° 及び 9° とする．

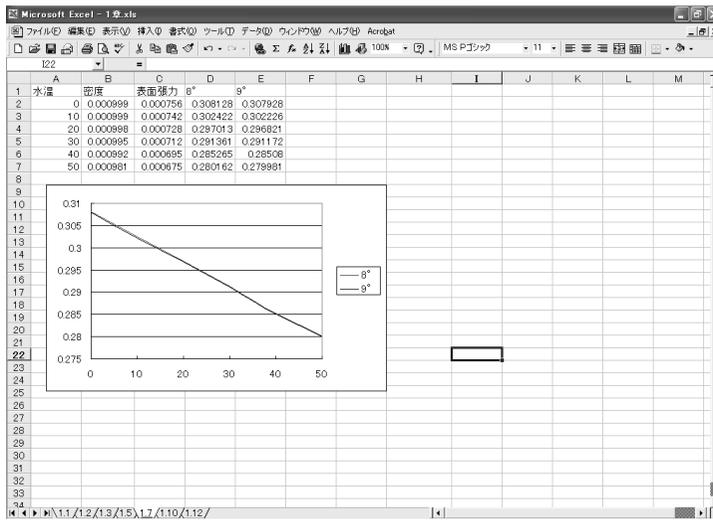


図 1.7 水の表面張力

1.4 粘性 (viscosity)

液体と気体を含めて流体 (fluid) という。流れている流体中に、流れの方向に x 軸、これと垂直方向に y 軸をとって、流れの速度を u で表わした時に、図 1.8 のように速度が一樣でなくて、言い換えれば流体の内部に相対速度がある場合には、流体の中に摩擦力が働いている。これは流れに平行な面内のせん断力であって、その強さを τ とすると

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad \text{または} \quad \frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.5)$$

で表わされ、乱れのない平行な流れでは μ または ν は流れの状況には関係なく、物質によって決まった値をもつことが実験的に知られている。式 (1.5) をニュートン (Newton) の摩擦法則といい、 μ は粘性係数 (coefficient of viscosity)、 ν は動粘性係数 (coef. of kinematic viscosity) と呼ばれる。 μ および $\nu (= \mu/\rho)$ の次元はそれぞれ $[\text{ML}^{-1} \text{T}^{-1}]$ および $[\text{L}^2 \text{T}^{-1}]$ である。

摩擦力 τ は考える面の上下で反対方向に働いているが、式 (1.5) によって τ の符号は du/dy と一致するように定義されている。またこの式から流体中では相対速度がなければ摩擦力が働かないことがわかる。すなわち静止している流体中には摩擦力はない。速度が一樣な流れでも摩擦力は働かないことになるが、水や空気などの実在の流体は固体表面に付着する性質があるために、固体面上で速度が 0 になり、図 1.8 のような速度分布になるのである。

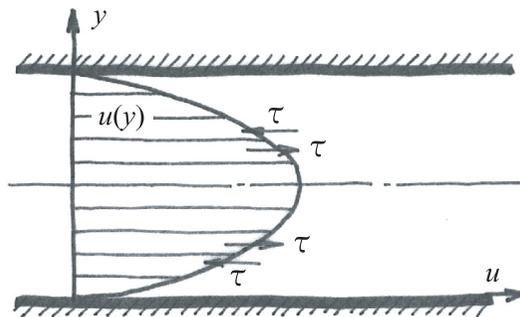


図 1.8 層流流速

ニュートンの摩擦法則で表わされる摩擦力は、流れに垂直な方向の分子運動に起因するものであって、流れに平行な一つの面を考えると、速度の大きい側にあった分子が大きい

運動量を持って反対側の分子と入れ換わり，速度の大きい側は運動量の一部を失う．これは運動量の減少であるから，流れと反対方向の力を受けたことに相当する．速度の小さい側は反対に流れの方向の力を受ける．このような力が流体内部の摩擦力であって，流体がきわめて静かにいわゆる層流*²の状態では流れている時に現われる．流れの中に乱れがあって，すなわち乱流*³の状態の場合は，さらに規模の大きい運動によって見かけの摩擦力が起こるが，これはニュートンの摩擦力とは違ったものである．

粘性係数の値は，同じ流体でも温度によって変化する．m-s 単位を用いた時の水および空気の動粘性係数 ν の値を図 1.9 にエクセルの表に示し，粘性係数 μ を $\mu = \rho\nu$ より計算する．

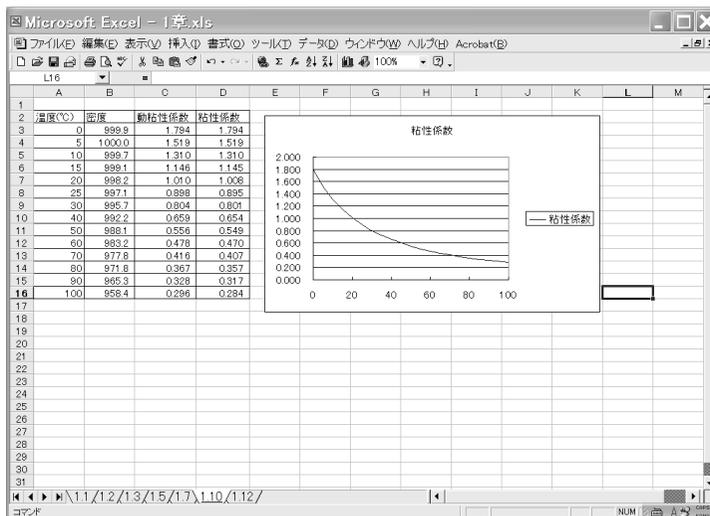


図 1.9 水の動粘性係数

*² 流れの方向に垂直な速度成分がほとんどなく，流体が流線上を運動している流れを層流という．

*³ 流線が乱れて不安定な流れを乱流という．流線については 3.2 参照．

1.5 水頭とエネルギーの伝達

水のような液体のもつエネルギーには、位置と運動のエネルギーのほかに、圧力のエネルギーがある。例えば容器に入れた水の底部では、水面に比べて位置エネルギーは小さいが、圧力エネルギーは大きくなっている。質量 m 、速度 v 、基準面からの高さ h にある水塊のもつ位置および運動のエネルギーは mgh および $mv^2/2$ であり、これらは単位重量当りに h および $v^2/2g$ になっていて、その次元はいずれも $[L]$ である。この水塊のもつ圧力の強さを p とすると、長さの次元をもつのは $p/\rho g$ であって、これが単位重量当りの圧力エネルギーである。このような単位重量当りのエネルギーを水頭 (head) と呼び、 $p/\rho g$ を圧力水頭 (Pressure head) という。

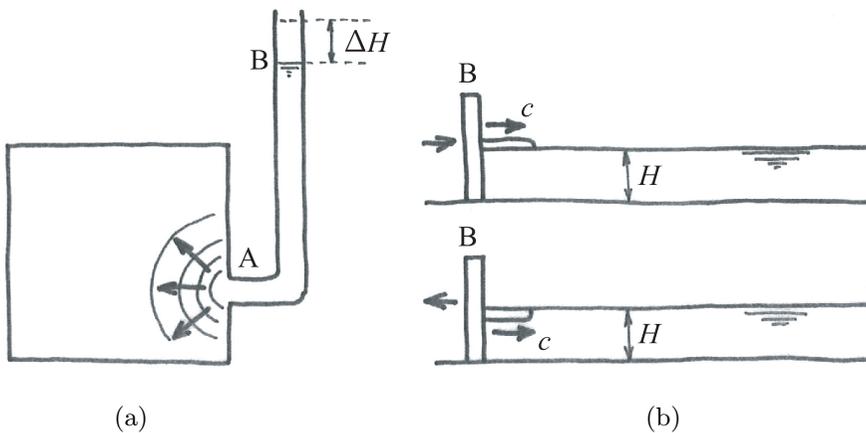


図 1.10 水中の速度で伝搬する圧力

図 1.10(a) のような密閉した容器に水を満たし、B の水面を急に上げて、A の位置での圧力を高めると、増加した圧力は弾性波の速度すなわち水中の音速で四方に伝わる。水の密度を ρ 、体積弾性係数を E とし、容器は完全に变形しないものとする、水中の音速は

$$c = \sqrt{E/\rho} \quad (1.6)$$

で与えられ、常温、常圧の水では c の値は約 1400 m/s であり、あまり大きくない容器では、内部全体の水圧が同時に同じ量だけ増大するものと考えてよい。

図 1.10(b) のような水面のある水路の一端 B を急に動かして、水面を少し隆起させると、この部分のエネルギーが高まる。この増加エネルギーの伝わる速度は、水深を H とする

と、水面の高まりが H に比べて十分に小さければ

$$c = \sqrt{gH} \quad (1.7)$$

で与えられる。

図 1.12 のような水路の一端 A に起こった水面の高まりが、500 m 離れた B において、水底の管を通して感知される時間と、水面を伝わる波が感知される時間の比を、エクセルにて計算する。

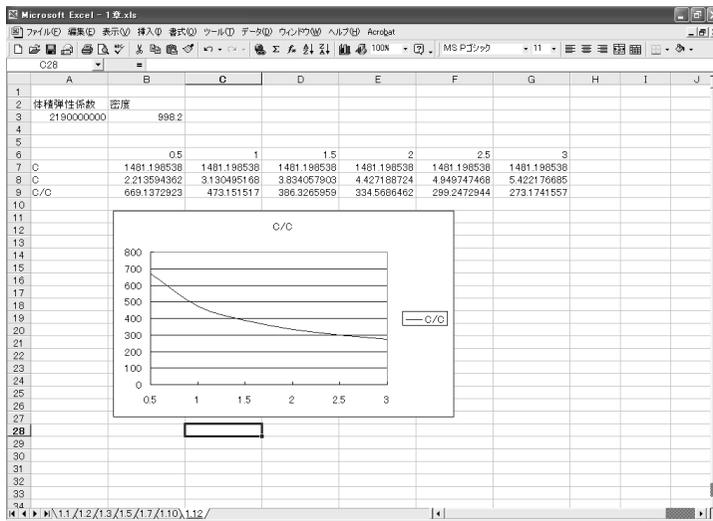


図 1.11 波と圧力の伝播

ただし水温は 20°C とし、水深 H を 50 cm から、50 cm ピッチで 5 m まで変化させる。なお水面が低下する場合も同様である。

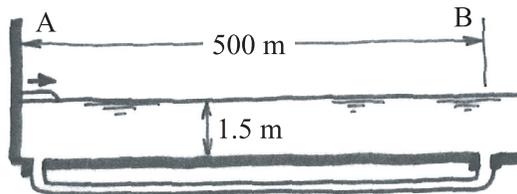


図 1.12 伝搬する時間