

基礎数学

概要

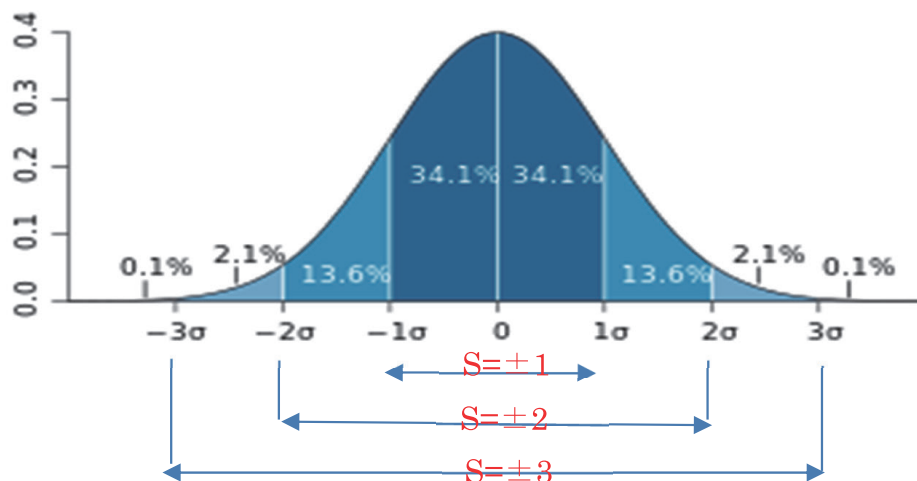
データ処理に必要な基本知識

- 行列式・ベクトル
- 最小 2 乗法
- 論理数学
- 統計学

特に誤差の解消には最小 2 乗法が有効でより一層『誤差を考慮したデータ処理』の理解を深める。

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$$



1.1. 行列式

行列式は、方程式などではなく、スカラーである。つまり、「1」「3」みたいな値をとる。

2×2 の時の行列式は以下の様になる。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

である。同様に 3×3 の時の行列式は以下の様になる。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ の行列式は}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

である。

● 行列式の積

1 行 3 列と 3 行 2 列の積は 1 行 2 列となる。

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 7 + 4 \times 3 + 6 \times 6 & 2 \times 5 + 4 \times 4 + 6 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 62 & 38 \end{bmatrix}$$

3 行 2 列と 2 行 3 列の積は 3 行 3 列となる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 3 + 2 \times 4 & 1 \times 5 + 2 \times 1 \\ 3 \times 1 + 1 \times 2 & 3 \times 3 + 1 \times 4 & 3 \times 5 + 1 \times 1 \\ 3 \times 1 + 2 \times 2 & 3 \times 3 + 2 \times 4 & 3 \times 5 + 2 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 11 & 7 \\ 5 & 13 & 16 \\ 7 & 17 & 17 \end{bmatrix}$$

● 転置行列

転置行列 (transpose of a matrix) とは、 m 行 n 列の行列 $\mathbf{A}$ に対して $\mathbf{A}$ の (i, j) 要素と (j, i) 要素を入れ替えてできる n 行 m 列の行列のことである。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ 転置 } \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ 行列の転置行列 $\mathbf{A}^T$ とする。 $\mathbf{A}^T$ は以下の様に示される。

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

上式の赤線 (対角線) を中心に 180 度回転した行列となる。

行列式は、逆行列の導出に必要な値である。逆行列とは、ある行列にかけることで、その行列を単位行列にしてしまう行列のことである。逆行列は、連立方程式・最小2乗法などを解くことを可能にする、行列計算の上で非常に有益かつ重要な力を有する。行列式が最も活躍するのは、逆行列を導出する場面である。

1.1.1. 逆行列

正方行列（転置行列の $n=m$ 行列） $\mathbf{A}$ に対して

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

が成り立つ $\mathbf{A}^{-1}$ を逆行列と呼ぶ。 $\mathbf{I}$ は単位行列

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

【例】逆数行

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求める。

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行基本変形を運用して左半分を $\mathbf{I}$ にするのが目標、まず一列目を見て、**1行目の2倍を2行目に加える。**

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

次に、**二列目（の第2成分以外）に0を並べるように操作を行う。**（2列-3列, $\frac{1}{2} \times 2$ 列 - 1列）

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

同様に、**三列目（の第3成分以外）に0を並べるように操作を行う。**

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

最後に、**2行目と3行目を操作し左側を単位行列にする。**

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

この右半分が $\mathbf{A}^{-1}$ である。

（別解）3行3列の逆行列の求め方

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ の逆行列を求める。

$\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ とする。

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \\ q_3 & r_3 & s_3 \end{bmatrix}$$

とする.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} - b_1 \begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = a_1(b_2c_3 - b_2c_3) - b_1(a_2c_3 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - a_2b_3)$$

逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ の各要素を以下に示す.

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & r_1 &= \frac{-\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & s_1 &= \frac{\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} \\ q_2 &= \frac{-\begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & r_2 &= \frac{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & s_2 &= \frac{-\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} \\ q_3 &= \frac{\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & r_3 &= \frac{-\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & s_3 &= \frac{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} \end{aligned}$$

で求められる.

(別解) 4 行 4 列の逆行列の求め方

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \text{ の逆行列を求める.}$$

$\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ とする.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 & r_1 & s_1 & t_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 & t_2 \\ q_3 & r_3 & s_3 & t_3 \\ q_4 & r_4 & s_4 & t_4 \end{bmatrix}$$

とする.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix}$$

逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ の各要素を以下に示す.

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\begin{bmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & r_1 &= \frac{-\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & s_1 &= \frac{\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & t_1 &= \frac{-\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} \\ q_2 &= \frac{-\begin{bmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & r_2 &= \frac{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & s_2 &= \frac{-\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & t_2 &= \frac{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} \\ q_3 &= \frac{\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & r_3 &= \frac{-\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & s_3 &= \frac{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & t_3 &= \frac{-\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} \\ q_4 &= \frac{-\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & r_4 &= \frac{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & s_4 &= \frac{-\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} & t_4 &= \frac{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}}{\mathbf{A}} \end{aligned}$$

逆行列を求めることで、連立方程式や最小 2 乗法を求めることができ利用範囲が広がる。

逆行列の利用例

● 連立方程式の解法

$$\begin{cases} 5x + y = 14 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

連立方程式の解法 方程式から要素行列 $\mathbf{A}$ と解行列 $\mathbf{B}$ を以下に設定する。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ の逆行列を求める。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ の逆行列は } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

で求まる。

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5 \times (-1) - 1 \times 2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & 1/7 \\ 2/7 & 5/-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.143 & 0.143 \\ 0.286 & -0.714 \end{bmatrix}$$

連立方程式の解は以下に求める事ができる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/7 & 1/7 \\ 2/7 & 5/-7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \times 14 & \frac{1}{7} \times 0 \\ \frac{2}{7} \times 14 & \frac{5}{-7} \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

逆行列を用いた連立方程式の解法は以上の様になる。

1.1.2. 最小 2 乗法の解法

今要素行列 $\mathbf{A}$ と解行列 $\mathbf{B}$ からなる方程式 $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ があり誤差を最小にして推定する。誤差 ε_i が最小になる計算を行なう。

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$$

に誤差が含まれているとすると

$$\Delta \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{X} + \varepsilon$$

となる。いま、誤差 ε を

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

とする。

この誤差の 2 乗和を最小にするように解を求める。式を

$$\varepsilon = \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$$

と書き直す。

誤差の 2 乗和を f とすると

$$f = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 = \varepsilon^T \varepsilon = (\mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{X})^T (\mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} - 2\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X}^T (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X}$$

上式を $\mathbf{X}$ で偏微分し f の極値を求める。(誤差が最小な $\mathbf{X}$ を求める。)

$$\frac{\delta f}{\delta \mathbf{X}} = -2\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} + 2\mathbf{X}^T (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) = 0$$

式より

$$\mathbf{X}^T(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$$

となり、両辺の転置をとり $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$ という性質と $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})$ が対象行列であることから

$$((\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^T \cdot \mathbf{X}^T)^T = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$$

となる．上式を $\mathbf{X}$ について解けば

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$$

この式で最小 2 乗解が得られる．

【例】最小 2 乗法

自立給電による無線中継装置の電力問題

問題：365 日昼夜連続稼働させるに必要なソーラパネルの容量と蓄電池の容量を求める．

昼間 … 太陽光発電による駆動＋バッテリーへの充電

夜間 … バッテリーによる駆動

以上が問題あるがここではソーラパネルの発電効率を推定する．推定条件として太陽高度を夏至と冬至では 2 倍違い面積当たりの太陽エネルギー量も 2 倍違う，そこで冬至の太陽高度での発電量を観測データから求めることにする．

試験は 12 月の冬至頃実施

試験方法：0.4W のパネル (0.5V 0.4W) を利用して南中時の太陽高度に正対するようにパネルを傾斜固定し，起電力 P (0.4W) と起電圧 E (0.5V) を消費する．抵抗値を

$$R = E^2 / P = 0.5^2 / 0.4 = 0.625 \Omega$$

の負荷抵抗を接続し両端の起電圧 V を測定する事で起電力 P を測定した．

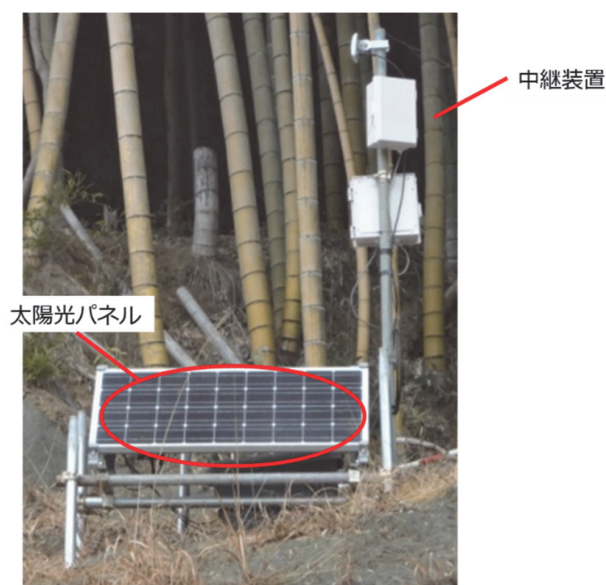


図 1.1.2-1 太陽パネルと無線装置

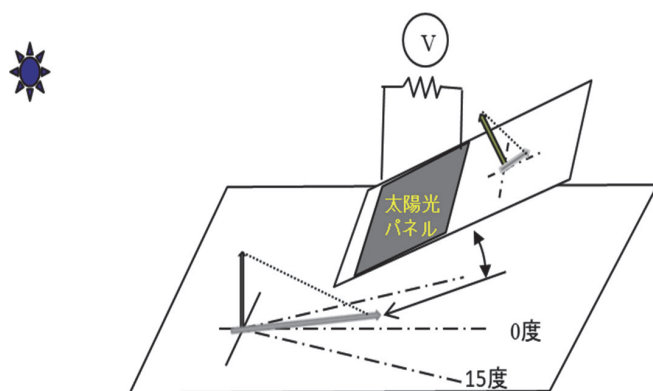


図 1.1.2-2 太陽パネル模型試験状況



測定した経過時間の起電力効率を以下に示す.

時間	経過時間	太陽高度(度)	起電圧(V)	起電力(W)	効率(起電力/0.4)
8:20	0.000	16.7	0.341	0.1856	0.464
9:30	1.167	25.5	0.418	0.2792	0.698
11:20	3.000	32.0	0.450	0.324	0.81
12:20	4.000	32.0	0.456	0.332	0.83
14:05	5.750	21.0	0.379	0.2296	0.574
16:00	7.667	10.0	0.235	0.0884	0.221

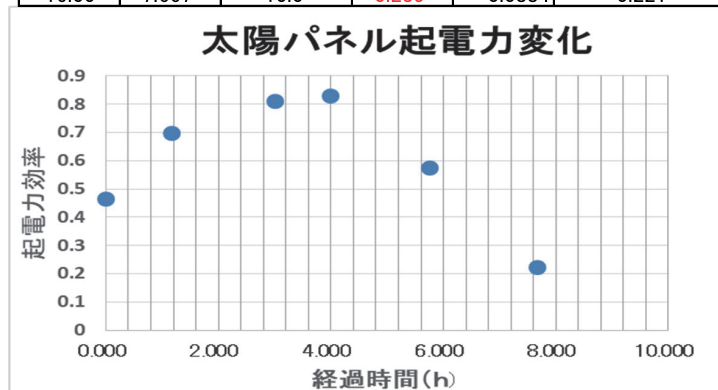


図 1.1.2-3 太陽パネル発生起電力

この試験結果から最小 2 乗法を用いた近似関数を求める.

モデル関数として

$$y = ax^2 + bx + c$$

の 2 次関数で定義し最小 2 乗解を求める.

要素行列 **A** は経過時間として, 解行列 **B** は起電力効率として定義する.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1.167^2 & 1.167 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 4^2 & 4 & 1 \\ 5.75^2 & 5.75 & 1 \\ 7.667^2 & 7.667 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.464 \\ 0.698 \\ 0.81 \\ 0.83 \\ 0.574 \\ 0.221 \end{bmatrix}$$

最小 2 乗法を計算

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.167^2 & 3^2 & 4^2 & 5.75^2 & 7.667^2 \\ 0 & 1.167 & 3 & 4 & 5.75 & 7.667 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1.167^2 & 1.167 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 4^2 & 4 & 1 \\ 5.75^2 & 5.75 & 1 \\ 7.667^2 & 7.667 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1.167^2 & 1.167 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 4^2 & 4 & 1 \\ 5.75^2 & 5.75 & 1 \\ 7.667^2 & 7.667 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.464 \\ 0.698 \\ 0.81 \\ 0.83 \\ 0.674 \\ 0.221 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4.887 \times 10^3 & 733.387 & 118.207 \\ 733.387 & 118.207 & 21.584 \\ 118.207 & 21.584 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1.167^2 & 1.167 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 4^2 & 4 & 1 \\ 5.75^2 & 5.75 & 1 \\ 7.667^2 & 7.667 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.464 \\ 0.698 \\ 0.81 \\ 0.83 \\ 0.674 \\ 0.221 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4.598 \times 10^{-3} & -0.035 & 0.035 \\ -0.035 & 0.29 & -0.355 \\ 0.035 & -0.355 & 0.753 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1.167^2 & 1.167 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 4^2 & 4 & 1 \\ 5.75^2 & 5.75 & 1 \\ 7.667^2 & 7.667 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.464 \\ 0.698 \\ 0.81 \\ 0.83 \\ 0.674 \\ 0.221 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.035 & 5.707 \times 10^{-4} & -0.028 & -0.031 & -0.014 & 0.038 \\ -0.355 & -0.064 & 0.201 & 0.246 & 0.158 & -0.185 \\ 0.753 & 0.387 & 3.487 \times 10^{-3} & -0.106 & -0.129 & 0.092 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.464 \\ 0.698 \\ 0.81 \\ 0.83 \\ 0.674 \\ 0.221 \end{bmatrix}$$

$$(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B = \begin{bmatrix} -0.032 \\ 0.194 \\ 0.558 \end{bmatrix}$$

従って最小 2 乗法によるモデル式は

$$y = 0.032x^2 + 0.194x + 0.558$$

となる。

求めた最小 2 乗解から日出から日没までの時間を積分すると 5.853 と得られる。

$$\int_{-2}^8 (-0.032x^2 + 0.194x + 0.558) dx = 5.853$$

冬至の南中時に太陽と対面（約 55 度）して設置すると冬至にはパネル起電容量の 5.8 倍の電力が得られることになる。そこで、機器の消費電力を M (w/h) とすると $(24 \times M)/5.8$ 以上のパネルが必要となる。バッテリー容量は夜間（14 時間）の電力確保と天気を考慮し $14 \times M$ の数倍のバッテリー容量を考える。いま、機器の消費電力を 3w/h とすれば余裕をもって、40w/h のパネルであれば 232w/h 日の起電電力が得られることになる。バッテリー容量は 2 日分の夜間電力を確保するとして $3 \times 14 \times 2 = 84w/h$ 程度と考える。

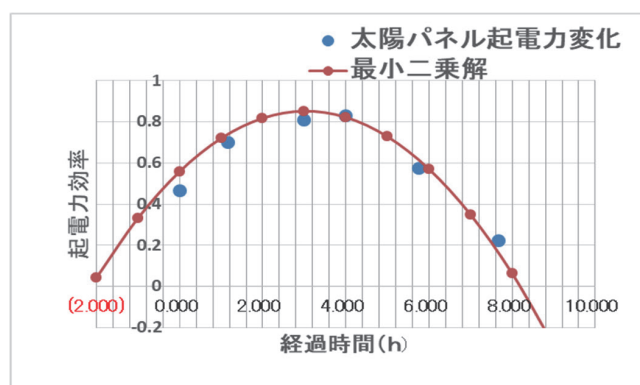


図 1.1.2-4 太陽パネル発生起電力の最小 2 乗結果

1.2. ベクトル

ベクトルは方向と大きさ（スカラー）を扱う。二次元ベクトルの成分表示を右座標に表示する。ここではベクトル $\vec{A} = \mathbf{A}$ と太字表記することとする。（以降太字はベクトルを意味する。）

$$\mathbf{A} = (2, 4)$$

$$\mathbf{B} = (6 - 2, 6 - 4) = (4, 2)$$

と表示する。すると

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (2, 4) + (4, 2) = (6, 6)$$

となり

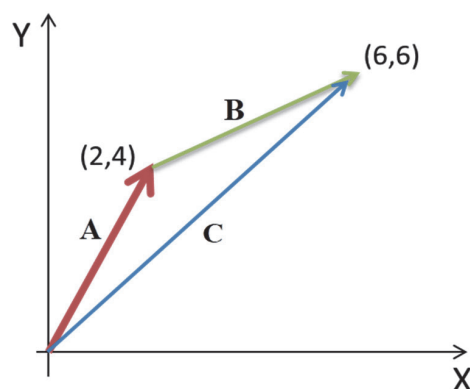


図 1.2-1 ベクトルイメージ