コンパクトシリーズ　数学

微分・積分

河村哲也　著

インデックス出版

Preface

大学で理工系を選ぶみなさんは、おそらく高校の時は数学が得意だったのではないでしょうか。本シリーズは高校の時には数学が得意だったけれども大学で不得意になってしまった方々を主な読者と想定し、数学を再度得意になっていただくことを意図しています。それとともに、大学に入って分厚い教科書が並んでいるのを見て尻込みしてしまった方を対象に、今後道に迷わないように早い段階で道案内をしておきたいという意図もあります。

数学は積み重ねの学問ですので、ある部分でつまずいてしまうと先に進めなくなるという性格をもっています。そのため分厚い本を読んでいて、枝葉末節にこだわると読み終えないうちに嫌になるということが多々あります。このような時には思い切って先に進めばよいのですが、分厚い本だとまた引っかかる部分が出てきて、自分は数学に向かないとあきらめてしまうことになりかねません。

このようなことを避けるためには、第一段階の本、あるいは読み返す本は「できるだけ薄い」のがよいと著者は考えています。そこで本シリーズは大学の２～３年次までに学ぶ数学のテーマを扱いながらも重要な部分を抜き出し、一冊については本文は 70 ～ 90 頁程度（Appendix や問題解答を含めてもせいぜい 100 ～ 120 頁程度）になるように配慮しています。具体的には本シリーズは

微分・積分
線形代数
常微分方程式
ベクトル解析
複素関数
フーリエ解析・ラプラス変換
数値計算

の 7 冊からなり、ふつうの教科書や参考書ではそれぞれ 200 ～ 300 ページになる内容のものですが、それをわかりやすさを保ちながら凝縮しています。

なお、本シリーズは性格上、あくまで導入を目的としたものであるため、今後、数学を道具として使う可能性がある場合には、本書を読まれたあともう一度、きちんと書かれた数学書を読んでいただきたいと思います。

河村 哲也

Contents

Chapter 1

種々の関数

1.1　関　　　数

2 つの変数 x，y が関連づけられており，x を決めたときそれに応じて y が決まるとき，y は x の**関数**であるといいます．このうち，x のように値を変化させる変数を**独立変数**とよび，独立変数の変化に応じて値の決まる変数を**従属変数**とよんでいます．数学で関数といった場合には，必ずしも式で表される必要はないのですが，本書では式で表される関数のみを考察の対象とします．

y が x の関数である場合に，

$$y = f(x) \tag{1.1.1}$$

と記します．ここで，f という文字は本質ではなく，何であっても同じです．慣れないうちは少し奇異に感じられるかもしれませんが，式（1.1.1）を

$$y = y(x) \tag{1.1.2}$$

と書くこともあります．これは式（1.1.1）と同じ意味をもっています．変数 x がある特定の値 a をとったとき y も特定の値になりますが．この特定の値を $f(a)$ と記します．

Example 1.1.1

$f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ のとき，$f(1/2)$，$f(1-2a)$ を求めなさい．

［Answer］

$$f(1/2) = (1/2)\sqrt{1-(1/2)^2} = (1/2)\sqrt{3/4} = \sqrt{3}/4$$

$$\begin{aligned} f(1-2a) &= (1-2a)\sqrt{1-(1-2a)^2} = (1-2a)\sqrt{4a-4a^2} \\ &= 2(1-2a)\sqrt{a-a^2} \end{aligned}$$

関数 $y = f(x)$ を視覚化するには，座標平面を用意して，いろいろな x に対して $f(x)$ を計算し，$(x,\ f(x))$ を座標平面上にプロットします．このような図を関数 $y = f(x)$ の**グラフ**といいます．

Example 1.1.1 でとりあげた関数のグラフを描くことを考えてみます．この場合は,根号内は負にはなれないということに注意する必要があります.したがって，x は

$$1 - x^2 \geqq 0 \quad \text{より} \quad -1 \leqq x \leqq 1$$

の範囲の値をとります．このように関数によっては x の範囲に制限がつくことがあり，この x の範囲を関数 $y = f(x)$ の**定義域**といいます．さらに，x が定義域内を変化した場合の y のとり得る範囲を**値域**といいます．**図 1.1.1** にこの関数のグラフを示しますが，図からもわかるように値域は

$$-\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{1}{2}$$

になります．

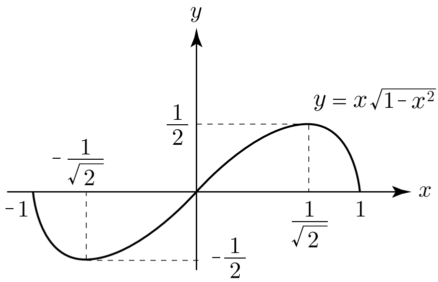


図 1.1.1

一方，式(1.1.1) の定義域と値域はすべての実数です．

$y = f(x)$のグラフが与えられているとき以下のグラフは(　)内の意味をもっています．

(a)　$y = -f(x)$　　（x 軸に関して折り返したグラフ）

(b)　$y = f(-x)$　　（y 軸に関して折り返したグラフ）

(c)　$y = -f(-x)$　　（x 軸と y 軸に関して折り返したグラフ）

(d)　$y = f(x-c)+d$　　（右に c，上に d 移動させたグラフ）

なぜなら（a）については任意の a に対して点（a，$f(a)$）と点（a，$-f(a)$）は x 軸に関して対称であるからです．（b）については $f(x)$ の $x = a$ における関数値と $f(-x)$ の $x = -a$ における関数値が等しいからです．（c）は（a）

と（b）を合わせたもので，これはまた原点に関して180°回軸したグラフともいえます．（d）は $y = f(x-c) + d$ の $x = a+c$ における関数値が $y = f(x)$ の $x = a$ における関数値に d を加えたもの等しいからです．

関数 $y = f(x)$ は x と y の間の対応関係を与えるため，y を与えて x を決める関係とみなすことも可能です．このことは $y = f$（x）を x について解いた式を $x = f^{-1}(y)$ と記せばはっきりします．この式の x と y を入れ替えた式

$$y = f^{-1}(x) \qquad (1.1.3)$$

を $y = f$（x）の逆関数といいます．

x と y の入れ換え，すなわち，任意の（x_0, y_0）を（y_0, x_0）にする操作は，**図 1.1.2** に示すようにもとの関数上の点を $y = x$ という直線に関して対称の位置に対応させるという操作になっています．

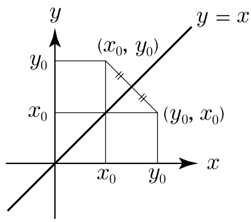


図 1.1.2

したがって $y = f$（x）との関係は

（e） $y = f^{-1}(x)$ （$y = f(x)$ を $y = x$ に関して折り直したグラフ）

となります．

逆関数の性質として，上述の $y = x$ に関する対称性のほかに，

$$x = f(f^{-1}(x)) \qquad (1.1.4)$$

$$x = f^{-1}(f(x)) \qquad (1.1.5)$$

があります．このことは以下のことから明らかです．

$y = f(x)$ ならば $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$

$y = f^{-1}(x)$ ならば $x = f(y) = f(f^{-1}(x))$

また $F(x) = f^{-1}(x)$ とおけば $f(x) = F^{-1}(x)$ になります．すなわち，逆関数の逆関数はもとの関数になります．このことは，逆関数はもとの関数の x と y を入れ換えを行い，逆関数の逆関数はもう一度 x と y を入れ換えるためもとにもどること，あるいは $f(x)$ を $y = x$ に関して折り返したものが $F(x)$ であるため，$F(x)$ をもう一度 $y = x$ に関して折り返すと，もとの $f(x)$（$= F^{-1}(x)$）に戻ることからもわかります．

■特殊な関数

関数 $f(x)$ に対して

$$f(x)=f(-x)$$

が成り立つとき $f(x)$ は偶関数であるといいます．たとえば，$f(x)=x^2$ は**偶関数**です．一方，

$$f(-x)=-f(x)$$

となる場合を**奇関数**といいます．たとえば，$f(x)=x/2$ や $f(x)=x^3$ は奇関数です．関数の性質①，②から偶関数は y 軸に関して対称であり，奇関数は原点に関して対称になります．

関数 $f(x)$ に対して，ある定数 c が存在して，任意の x について

$$f(x)=f(x+c) \tag{1.1.6}$$

が成り立つとき，$f(x)$ は周期 c の周期関数といいます．$y=f(x+c)$ は $c>0$ のとき関数の性質④で $d=0$ とおいて $y=f(x)$ を $-c$ だけ右に平行移動した関数になります．すなわち式（1.1.6）は，$f(x)$ を c だけ左に平行移動した関数ともとの関数 $f(x)$ が一致するため，周期 c をもちます．

1.2　簡単な関数

もっとも簡単な関数に **1 次関数**

$$y=ax+b \tag{1.2.1}$$

があります．ここで a と b は定数で，a が傾き（正ならば右上がり，負ならば右下がり），b は y 軸との交点を表します（**図 1.2.1(a)**）．

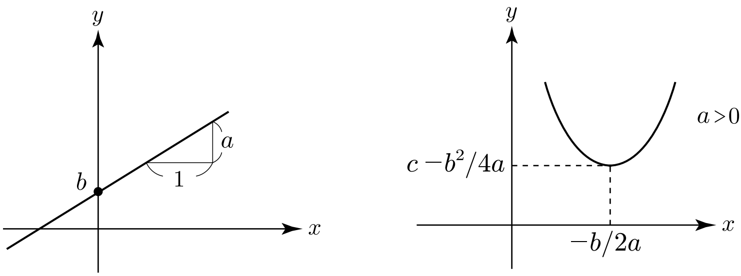
次に **2 次関数**

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0) \tag{1.2.2}$$

は

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

と変形できます．そこでグラフを描くには，放物線 $y=ax^2$ を右に $-b/2a$，上に $c-b^2/4a$ 移動させます．すなわち，頂点が（$-b/2a$，$c-b^2/4a$）の放物線になります．（**図 1.2.1(b)**）



(a)　　　　(b)

図 1.2.1

1 次式の割り算の形をした関数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\quad(ad-bc\neq 0) \tag{1.2.3}$$

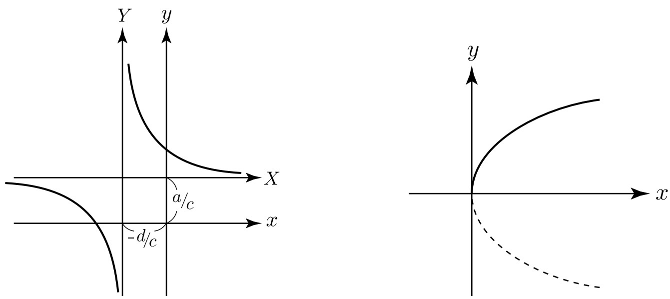
もよく現れます．式(1.2.3) は

$$y=\frac{(bc-ad)/c^2}{x+(d/c)}+\frac{a}{c}$$

と変形できるため，$Y=A/X$（ただし $X=x+(d/c)$, $Y=y-(a/c)$, $A=(bc-ad)/c^2$）という関数が基本になります．これは，**図 1.2.2(a)** に示すような形をしており，$x=-d/c$，$y=a/c$ という漸近線をもちます．

最後に**無理関数**の一例である

$$y=\sqrt{x} \tag{1.2.5}$$



$(A>0,\ d/c<0,\ a/c>0)$

(a)　　　　(b)

図 1.2.2

を考えます．根号内は負にはなれないので定義域は $x \geqq 0$ です．また，右辺は負ではないため，値域も $y \geqq 0$ です．この関数は $y = x^2$ の逆関数のひとつ（もうひとつは $y = -\sqrt{x}$）であるため，グラフは $y = x^2$ の $x > 0$ の部分を $y = x$ に関して折り返したものになります（**図 1.2.2(b)** 参照）．なお，$y = x^2$ の $x < 0$ の部分を $y = x$ に関して折り返したものは関数 $y = -\sqrt{x}$ です．

1.3　初等関数

（1）指数関数

x が実数の場合の関数

$$f(x) = a^x \quad (a > 0) \tag{1.3.1}$$

を，x が有理数のときべき乗と一致するような連続関数（後述）として定義します．式(1.3.1）を指数関数といいます．**指数関数**に対して**指数法則**

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy} \tag{1.3.2}$$

が成り立ちます．ただし，x と y は実数です．

図 1.3.1 は $y = a^x$ のグラフを，$a > 1$ と $0 < a < 1$ について描いたもので，それぞれ単調増加関数と単調減少関数になっています．

よく用いられる指数関数として，$a = e$ にとったものがあります[*1]．ここで e は

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (= 2.718281828459\cdots) \tag{1.3.3}$$

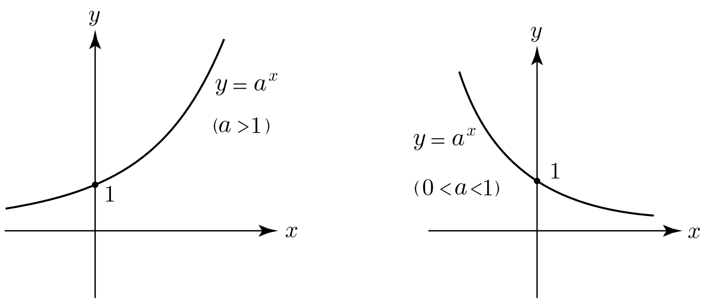


図 1.3.1

＊1　このとき e^x となりますが，これを $\exp x$ と書くことがあります．

で定義される数で，π のような**超越数**です．なお，$a_n = (1+1/n)^n$ とおくと $a_n < a_{n+1}$ であり，また，任意の n に対して $a_n < 3$ が成り立つことが示せるため，a_n は有界な単調増加数列であり極限値（後述）をもちます[＊2]．

（2）対数関数

指数関数 $y = a^x$（ただし $a > 0$）の逆関数を**対数関数**とよび，

$$y = \log_a x \tag{1.3.4}$$

と記します．ここで a を対数関数の底とよんでいます．特に底が 10 のとき**常用対数**とよび，また底が e のとき**自然対数**とよびます．自然対数ではふつう e を省略するか，別の記号 ln を用いて

$$y = \log x, \quad y = \ln x \tag{1.3.5}$$

と記します．

式(1.1.4)，(1.1.5）において f として対数関数または指数関数を用いれば

Point

$$\log_a a^x = x, \quad a^{\log_a x} = x \tag{1.3.6}$$

が成り立ちます．特に底を e にとれば

$$\log e^x = x, \quad e^{\log x} = x \tag{1.3.7}$$

となります．式(1.3.6）の第 1 式で x のかわりに $x+y$ とすれば

$$\log_a a^x a^y = \log_a a^{x+y} = x + y = \log_a a^x + \log_a a^y$$

が成り立ち，$a^x = X$，$a^x = Y$ とおけば

Point

$$\log_a XY = \log_a X + \log_a Y \tag{1.3.8}$$

となります．同様に

Point

$$\log_a X/Y = \log_a X - \log_a Y \tag{1.3.9}$$

も成り立ちます．

＊2　有界な単調増加数列は収束することが知られています．

さらに**底の変換公式**とよばれる次の公式，

Point

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \tag{1.3.10}$$

も成り立ちます．

なぜなら $a = c^A$，$b = c^B$ とおくと，$c = a^{1/A}$ であるため，$b = a^{B/A}$ となり，この式と $A = \log_c a$，$B = \log_c b$ から

$$\log_c b / \log_c a = B/A = \log_a a^{B/A} = \log_a b$$

となるからです．

式（1.3.10）から

$$\log_a x = \frac{\log_x x}{\log_x a} = \frac{1}{\log_x a}$$

という関係が得られます．したがって，任意の実数 p に対して

$$\log_a x^p = \frac{\log_x x^p}{\log_x a} = \frac{p}{\log_x a} = p \log_a x$$

が成り立ちます．

対数関数のグラフは指数関数のグラフを $y = x$ に関して折り返したものなので，図 1.3.1 を参照して，**図 1.3.2** のようになります．なお，対数関数の定義域は $x > 0$ です．

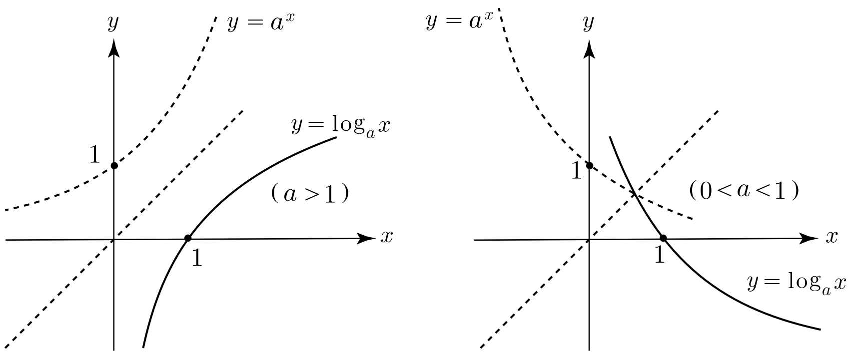


図 1.3.2

Problems　Chapter 1

1. 次の方程式を解きなさい.
   （a）$9^x - 10\cdot 3^x + 9 = 0$
   （b）$8^{2x+3} = 2^{3x+5}$
   （c）$3^x + 3^y = 10/3$，$3^{x+y} = 1$

2. 次の問いに答えなさい.
   （a）$\log_3 6$，$\log_5 10$，$3/2$ を大きい順にならべなさい.
   （b）$\log_2(x-1) + \log_2(5-x)$ の最大値を求めなさい.

3. 次の問いに答えなさい.
   （a）$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$ を満たす x を求めなさい.
   ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ とします.
   （b）$\tan(x/2) = \dfrac{1+\sin x - \cos x}{1+\cos x + \sin x}$ を証明しなさい.

4. 次式の値を計算しなさい.
   （a）$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x$
   （b）$\tan^{-1}x + \tan^{-1}(1/x)$
   （c）$\tan^{-1}(1/2) + \tan^{-1}(1/3)$

5. $\cosh x$ と $\tanh x$ の逆関数を求めなさい.